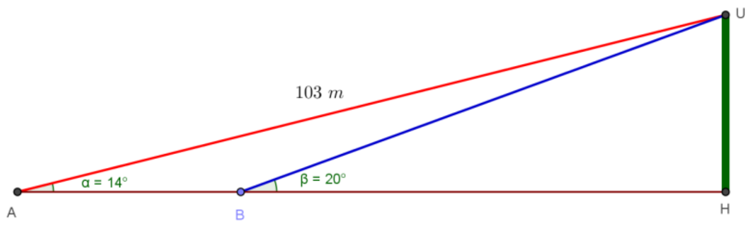
ORDINAMENTO 2011 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Una fotografa naturalista individua un uccello raro appollaiato su un albero. L'angolo di elevazione è di 14° e il telemetro dell'apparecchio fotografico indica che tra l'uccello e l'obiettivo vi è una distanza di 103 metri. Ella avanza lentamente, sino ad arrivare in un punto per cui l'angolo di elevazione è di 20°. A che distanza si trova ora l'uccello dall'obiettivo della fotografa?



Sia A la posizione iniziale della fotografa ed U l'uccello appollaiato sull'albero HU; la distanza AU è 103 m.
Sia B la posizione finale della fotografa: dobbiamo determinare la distanza BU.
Risulta:

$UH = 103 \cdot \sin(14°) \cong 24.9\ m$; quindi:

$$BU = \frac{UH}{\sin(20°)} = \frac{24.9\ m}{\sin(20°)} \cong 72.8\ m$$

QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$ *quando x tende a* 0^+.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $[+\infty - \infty]$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x} - \frac{cosx}{sinx} = \frac{sinx - x\ cosx}{x\ sinx}$$

Adesso il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Le funzioni al numeratore e al denominatore sono continue e derivabili; analizziamo la derivata del denominatore:

$D(x\ sinx) = sinx + xcosx = 0\ \ se\ \ tgx = -x$, che non si annulla mai in un intorno destro di x=0 (si confrontino i grafici di $y = tgx\ \ e\ \ y = -x$).

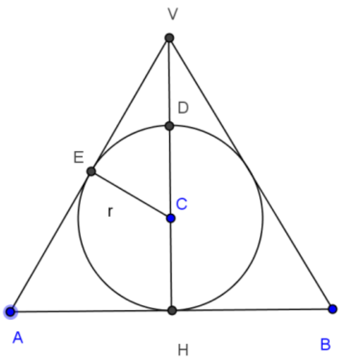
Possiamo quindi applicare la regola di de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{D(sinx - x\ cosx)}{D(x\ sinx)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{cosx - cosx + xsinx}{sinx + xcosx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xsinx}{sinx + xcosx} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{sinx}{\frac{sinx}{x} + cosx} = \frac{0}{1+1} = 0 = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{sinx - x\ cosx}{x\ sinx}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right)$$

QUESITO 3

Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ *dalla superficie sferica.*



Poniamo VD=x (con x>0). Dalla similitudine fra i triangoli AHV e VCE risulta:
VE:CE=VH:AH.
VC=r+x;

$$VE = \sqrt{VC^2 - EC^2} = \sqrt{(x+r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 + 2rx}\ ;$$

VH=2r+x; quindi:

$$AH = \frac{CE \cdot VH}{VE} = \frac{r(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}$$

Risulta poi: VA:VH=VC:VE, da cui

$$VA = \frac{VH \cdot VC}{VE} = \frac{(x+r)(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}$$

La superficie laterale è:

$$S = \pi \cdot AH \cdot VA = \cdots = \pi\ r\frac{x^2+3rx+2r^2}{x}$$

Questa espressione è minima se lo è:

$y=\frac{x^2+3rx+2r^2}{x}$; *la derivata è data da:*

$y'=\frac{x^2-2r^2}{x^2} \geq 0$ *per* $x^2 \geq 2r^2$*, cioè, data la limitazione della x,* $x>r\sqrt{2}$*; quindi la funzione è crescente per tali x e decrescente per* $0<x<r\sqrt{2}$ *e pertanto in* $x=r\sqrt{2}$ *ha il minimo, come richiesto.*

QUESITO 4

Si dimostri che il grafico di una qualsiasi funzione polinomiale di terzo grado ha esattamente un flesso.

$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (con\ a\neq 0)$

$y'=3ax^2+2bx+c\ ;\quad y''=6ax+2b=0\ \ se\quad x=-\frac{b}{3a}$

Inoltre la concavità cambia in un intorno di $x=-\frac{b}{3a}$; infatti, se per esempio a>0 risulta:
$y''=6ax+2b>0\ se\ \ x>-\frac{b}{3a}\quad e\quad y''<0\ \ se\ \ x<-\frac{b}{3a}$.
In modo analogo si ragiona se a<0: $x=-\frac{b}{3a}$ è quindi (l'unico) punto di flesso.

Pertanto la funzione ha uno ed un solo flesso.

QUESITO 5

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva

$$y=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

dall'asse x e dalle rette x=1, x=3.

Osserviamo che la funzione da 1 a 3 è positiva, quindi il volume del solido richiesto è dato da:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_1^3 \frac{x}{1+x}dx=\pi\int_1^3\frac{x+1-1}{1+x}dx=\pi\int_1^3\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=$$

$$=\pi\cdot[x-\ln|1+x|]_1^3=\pi\cdot(3-ln4-1+ln2)=\pi\cdot(2-2ln2+ln2)=\pi\cdot(2-ln2)\ \ u^3$$

QUESITO 6

Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{2x}{x-1}}, & se\ x \neq 1 \\ 0, & se\ x = 1 \end{cases}$$

Si dica se essa è continua nel punto x = 1.

Siccome f(1)=0, dobbiamo verificare che per x che tende a 1 la funzione $e^{\frac{2x}{x-1}}$ tende a 0.

$$\lim_{x \to 1^+} e^{\frac{2x}{x-1}} = +\infty \ , \quad \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{2x}{x-1}} = 0^+$$

Quindi la funzione NON è continua in x=1, dove c'è una discontinuità di seconda specie.

QUESITO 7

Si determini il campo di esistenza della funzione $y = \arcsin \ln(2-x)$ *.*

La funzione arcsin(x) è definita per $-1 \leq x \leq 1$, quindi il campo di esistenza della funzione data è:

$$-1 \leq \ln(2-x) \leq 1 \ , \quad e^{-1} \leq 2-x \leq e \ , \quad \begin{cases} 2-x \geq e^{-1} \\ 2-x \leq e \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \leq 2 - \dfrac{1}{e} \\ x \geq 2-e \end{cases}$$

Il campo di esistenza della funzione è quindi: $2 - e \leq x \leq 2 - \frac{1}{e}$.

QUESITO 8

Si consideri la seguente proposizione: "La relazione di perpendicolarità fra rette nel piano è riflessiva, simmetrica e transitiva". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

Riflessiva: una retta è perpendicolare a se stessa. Falso (una retta è parallela a se stessa).
Simmetrica: se a è perpendicolare a b, allora b è perpendicolare ad a. Vero.
Transitiva: se a è perpendicolare a b e b è perpendicolare a c allora a è perpendicolare a c. Falso (a è parallela a c).

QUESITO 9

Si calcoli il valore medio della funzione $y = \sqrt{\sin x} \cdot \cos x$ *, nell'intervallo* $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

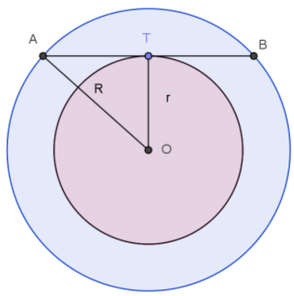
Ricordiamo che il valor medio di una funzione f(x) continua in un intervallo [a; b] è dato da:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cdot \cos x \, , dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx(sinx)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2}{3}(sinx)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{3} - 0\right] = \frac{4}{3\pi} = valor\ medio$$

QUESITO 10

Si dimostri che una corona circolare ha la stessa area del cerchio che ha per diametro una corda del cerchio maggiore la quale sia tangente al cerchio minore.



La corona circolare individuata dai cerchi concentrici di raggi r ed R (con r<R) ha area:

$$Area\ (corona) = \pi(R^2 - r^2)$$

Applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$AT^2 = R^2 - r^2$$

Il cerchio di diametro AB ha raggio AT (che è la metà di AB), quindi la sua area è:

$$Area\ (cerchio\ di\ diametro\ AB) = \pi \cdot AT^2 = \pi(R^2 - r^2) = R^2 - r^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria