PNI 2011 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si consideri, nell'intervallo chiuso $[0; 2\pi]$, *la funzione:*

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+sinx}.$$

a)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico Λ.

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+sinx}$$

Dominio:

La funzione, nell'intervallo di studio, è definita quando $\sin x \neq -1$, $x \neq \frac{3}{2}\pi$

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: y=1 ; se y=0: $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$ $(non\ accettabile)$.

Positività:

Essendo il denominatore sempre positivo, la funzione è positiva quando $\cos x > 0$ quindi:

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \ , \ \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$$

Limiti:

$$\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\pi\right)^-} \frac{\cos x}{1+sinx} = -\infty \ , \quad \lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\pi\right)^+} \frac{\cos x}{1+sinx} = +\infty$$

Asintoti:

Asintoto verticale (destro e sinistro) $x = \frac{3}{2}\pi$.

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{-1-\sin x}{(\sin x+1)^2} \geq 0 \quad se \quad \sin x < -1 : mai \, .$$

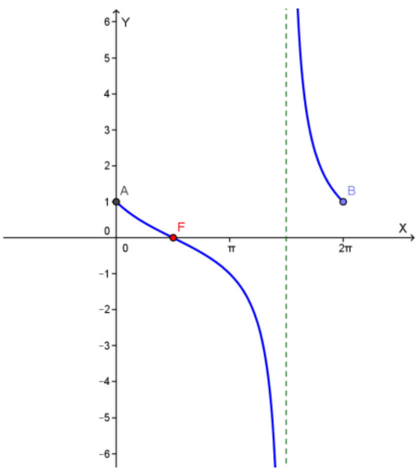
Pertanto la funzione è sempre decrescente e la derivata prima non si annulla mai.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{\cos x}{(\sin x+1)^2} \geq 0 \quad se \quad \cos x \geq 0 \, , \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$$

Il grafico ha quindi la concavità verso l'alto se $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$ e la concavità verso il basso se , $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$. Si ha un flesso per $x = \frac{\pi}{2}$, con ordinata 0.

Grafico della funzione:



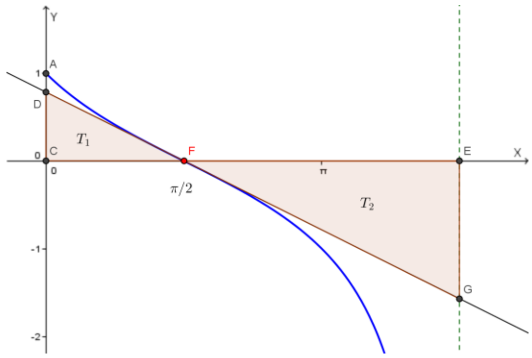
b)

Si scriva l'equazione della tangente a Λ nel punto di flesso e si calcoli l'area del triangolo T_1 che essa forma con gli assi cartesiani e quella del triangolo T_2 che forma con l'asse x e l'asintoto verticale.

Il punto di flesso è $F = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; risulta: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ quindi la tangente in F ha equazione:

$$y - 0 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$$

Rappresentiamo graficamente i triangoli T_1 e T_2.



Cerchiamo l'intersezione D della tangente di flesso con l'asse x:

$$D: \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \end{cases}, \quad D = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

Il triangolo T_1 ha quindi area: $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}\ u^2 \cong 0.62\ u^2$

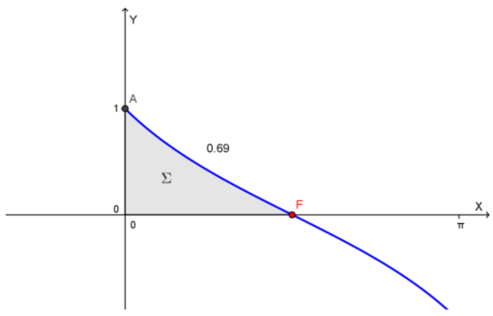
Cerchiamo l'intersezione G della tangente di flesso con l'asintoto:

$$G: \begin{cases} x = \frac{3}{2}\pi \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \end{cases}, \quad G = \left(0; -\frac{\pi}{2}\right)$$

Il triangolo T_2 ha quindi area: $\frac{1}{2}(\pi)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}\ u^2 \cong 2.47\ u^2$

c)

Si calcoli l'area della superficie piana Σ, *delimitata dalla curva* Λ *e dagli assi cartesiani nell'intervallo* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.



L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+sinx}\, dx$$

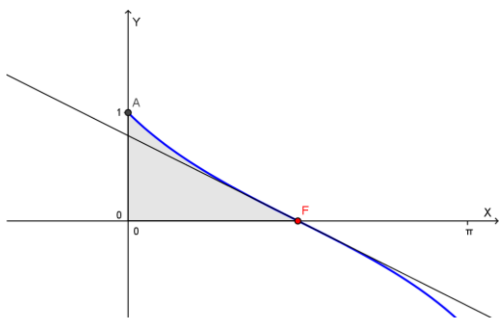
Calcoliamo l'integrale indefinito: $\int \frac{\cos x}{1+sinx}\, dx = \ln|1+sinx| + C$

Quindi:

$$Area = [\ln|1+sinx|]_0^{\frac{\pi}{2}} = (ln2)\, u^2 \cong 0.69\ \ u^2 = Area$$

d)

Si scelga a caso un punto all'interno della superficie piana Σ. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno al triangolo T_1.



La probabilità richiesta è:

$$p = \frac{Area(T_1)}{Area(\Sigma)} = \frac{\frac{\pi^2}{16}}{ln2} \cong 0.89 = 89\ \%$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria