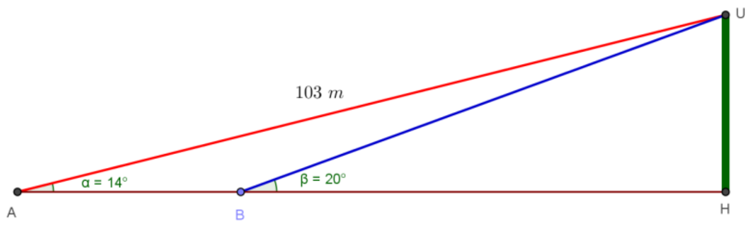
PNI 2011 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Una fotografa naturalista individua un uccello raro appollaiato su un albero. L'angolo di elevazione è di 14° e il telemetro dell'apparecchio fotografico indica che tra l'uccello e l'obiettivo vi è una distanza di 103 metri. Ella avanza lentamente, sino ad arrivare in un punto per cui l'angolo di elevazione è di 20°. A che distanza si trova ora l'uccello dall'obiettivo della fotografa?



Sia A la posizione iniziale della fotografa ed U l'uccello appollaiato sull'albero HU; la distanza AU è 103 m.
Sia B la posizione finale della fotografa: dobbiamo determinare la distanza BU.
Risulta:

$UH = 103 \cdot \sin(14°) \cong 24.9\ m$; quindi:

$$BU = \frac{UH}{\sin(20°)} = \frac{24.9\ m}{\sin(20°)} \cong 72.8\ m$$

QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$ *quando x tende a* 0^+.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $[+\infty - \infty]$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x} - \frac{cosx}{sinx} = \frac{sinx - x\ cosx}{x\ sinx}$$

Adesso il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Le funzioni al numeratore e al denominatore sono continue e derivabili; analizziamo la derivata del denominatore:

$D(x\, sinx) = sinx + xcosx = 0 \;\; se \;\; tgx = -x$, che non si annulla mai in un intorno destro di x=0 (si confrontino i grafici di $y = tgx \;\; e \;\; y = -x$).

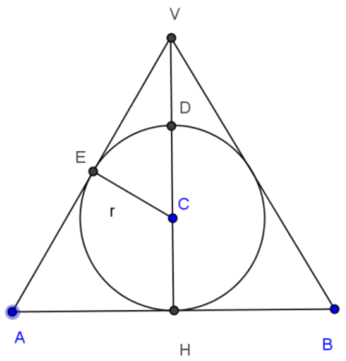
Possiamo quindi applicare la regola di de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{D(sinx - x\, cosx)}{D(x\, sinx)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{cosx - cosx + xsinx}{sinx + xcosx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xsinx}{sinx + xcosx} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{sinx}{\frac{sinx}{x} + cosx} = \frac{0}{1+1} = 0 = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{sinx - x\, cosx}{x\, sinx}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right)$$

QUESITO 3

Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.



Poniamo VD=x (con x>0). Dalla similitudine fra i triangoli AHV e VCE risulta:
VE:CE=VH:AH.
VC=r+x;

$$VE = \sqrt{VC^2 - EC^2} = \sqrt{(x+r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 + 2rx} \, ;$$

VH=2r+x; quindi:

$$AH = \frac{CE \cdot VH}{VE} = \frac{r(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}$$

Risulta poi: VA:VH=VC:VE, da cui

$$VA = \frac{VH \cdot VC}{VE} = \frac{(x+r)(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}$$

La superficie laterale è:

$$S = \pi \cdot AH \cdot VA = \cdots = \pi\, r \frac{x^2 + 3rx + 2r^2}{x}$$

Questa espressione è minima se lo è:

$y = \frac{x^2+3rx+2r^2}{x}$; *la derivata è data da:*

$y' = \frac{x^2-2r^2}{x^2} \geq 0$ *per* $x^2 \geq 2r^2$, *cioè, data la limitazione della x,* $x > r\sqrt{2}$; *quindi la funzione è crescente per tali x e decrescente per* $0 < x < r\sqrt{2}$ *e pertanto in* $x = r\sqrt{2}$ *ha il minimo, come richiesto.*

QUESITO 4

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$f(x) = \log_{sinx} x^4$ *nel punto P di ascissa x=1.*

Se x=1, y=0, quindi P=(1; 0). Calcoliamo il coefficiente angolare della tangente, riscrivendo prima la funzione come logaritmo naturale:

$$f(x) = \log_{sinx} x^4 = \frac{\ln x^4}{\ln sinx} = 4 \cdot \frac{\ln|x|}{\ln sinx}$$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln sinx - (\ln|x|) \cdot \frac{cosx}{sinx}}{\ln^2 sinx}, \quad f'(1) = 4 \cdot \frac{ln(sin1)}{\ln^2 sin1} = \frac{4}{ln(sin1)} \cong -23$$

Quindi la tangente ha equazione:

$$y - 0 = \frac{4}{ln(sin1)}(x-1) \;, \quad y = \frac{4}{ln(sin1)}(x-1)$$

QUESITO 5

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva

$$y = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

dall'asse x e dalle rette x=1, x=3.

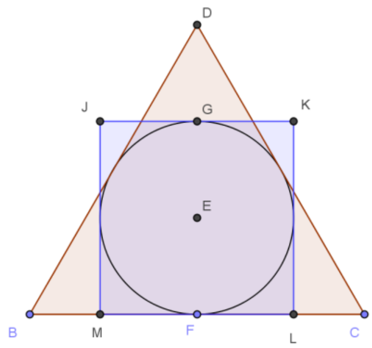
Osserviamo che la funzione da 1 a 3 è positiva, quindi il volume del solido richiesto è dato da:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_1^3 \frac{x}{1+x} dx = \pi \int_1^3 \frac{x+1-1}{1+x} dx = \pi \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$= \pi \cdot [x - \ln|1+x|]_1^3 = \pi \cdot (3 - ln4 - 1 + ln2) = \pi \cdot (2 - 2ln2 + ln2) = \pi \cdot (2 - ln2)\ u^3$$

QUESITO 6

Si dimostri che l'area di una sfera di raggio r , l'area della superficie totale del cilindro circoscritto, e l'area della superficie totale del cono equilatero circoscritto, sono proporzionali ai numeri 4, 6, 9.



Il raggio del cilindro circoscritto è uguale ad r, quindi la sua superficie totale è:

$$S_T(cilindro) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r(2r) = 6\pi r^2$$

Il raggio di base del cono circoscritto è: $BF = EF \cdot tg(60°) = r\sqrt{3}$. L'apotema del cono è:

$BD = \frac{BF}{\cos(60°)} = \frac{r\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2r\sqrt{3}$; quindi la superficie totale del cono è:

$$S_T(cono) = \pi \cdot BF^2 + \pi \cdot BF \cdot a = \pi \cdot (3r^2) + \pi \cdot \left(r\sqrt{3}\right) \cdot \left(2r\sqrt{3}\right) = 3\pi r^2 + 6|pi\, r^2 = 9\pi r^2$$

Quindi:

$$S(sfera): S(cilindro) = 4\pi r^2 : 6\pi r^2 = 4:6$$

$$S(sfera): S(cono) = 4\pi r^2 : 9\pi r^2 = 4:9$$

Pertanto:

$$S(sfera): S(cilindro): S(cono) = 4:6:9$$

QUESITO 7

Con l'aiuto di una calcolatrice si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $e^x - 2 = 0$, con punto iniziale $x_0 = 1$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

Osserviamo che, posto $f(x) = e^x - 2$, risulta f(0)=-2<0 ed f(1)=e-2>0; quindi l'equazione, per il teorema degli zeri ammette almeno una radice tra 0 ed 1 (notiamo che la funzione è continua e derivabile quanto si vuole nell'intervallo [0; 1]).

Risulta poi:

$f'(x) = e^x > 0$ per ogni x, quindi la funzione è strettamente crescente, perciò la radice è unica.

Inoltre: $f''(x) = e^x > 0 \; per\ ogni\ x$.

Essendo il segno della derivata seconda costante, possiamo applicare il metodo delle tangenti (metodo di Newton).

Essendo poi $f(a) \cdot f''(x) < 0 \; in \;\; [a, b] = [0; 1]$ dobbiamo assumere come punto iniziale di iterazione $x_0 = b = 1$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \cong 0.736 \; ; \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.736 - \frac{f(0.736)}{f'(0.736)} \cong 0.694$$

Quindi dopo due iterazioni si ottiene per la radice il valore $x_2 = 0.694$.

Osserviamo che la soluzione esatta dell'equazione è $x = \ln(2) = 0.6931471805599$ ....

QUESITO 8

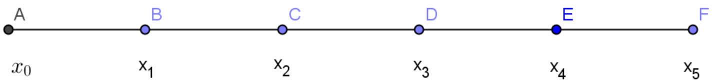
Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della regione piana, delimitata dalla curva di equazione $y = \sqrt{sinx}$ e dall'asse delle x nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

Osserviamo che la funzione è non negativa nell'intervallo dato, annullandosi agli estremi.

Utilizziamo il metodo dei trapezi con n=5 suddivisioni. Risulta:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right]$$

Posto $f(x) = \sqrt{sinx}$, consideriamo l'intervallo $[0;\pi]$ e con n=5 abbiamo $h = \frac{\pi-0}{5} = \frac{\pi}{5}$.



$$x_0 = 0,\ \ x_1 = \frac{\pi}{5},\ \ \ x_2 = \frac{2}{5}\pi,\ \ x_3 = \frac{3}{5}\pi,\ \ \ x_4 = \frac{4}{5}\pi,\ \ \ x_5 = \pi$$

Quindi si ha la seguente approssimazione:

$$\int_0^\pi \sqrt{sinx}\,dx \cong \frac{\pi}{5}\cdot\left[\frac{f(0)+f(\pi)}{2}+f\left(\frac{\pi}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\pi\right)+f\left(\frac{3}{5}\pi\right)+f\left(\frac{4}{5}\pi\right)\right] \cong 2.1889$$

Quindi $\quad Area \cong 2.20\ u^2$

Notiamo che il valore esatto di $\int_0^\pi \sqrt{sinx}\,dx$ è: $2.3963 \dots\dots..$

QUESITO 9

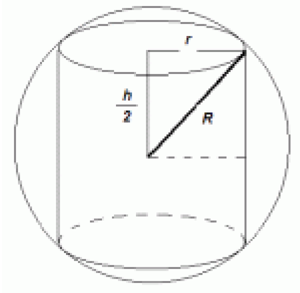
La squadra A ha probabilità 2/5 di vincere ogniqualvolta gioca. Quante partite deve giocare perché la probabilità che ne vinca almeno una sia maggiore del 90%?

Dobbiamo cercare n in modo che, giocando n partite, la probabilità di vincere almeno una partita sia maggiore di 0.9.
Probabilità di non vincere una partita: 3/5.
Probabilità di non vincere mai in n partite: $\left(\frac{3}{5}\right)^n$.
Probabilità di vincere almeno una volta: $1-\left(\frac{3}{5}\right)^n$; dobbiamo cercare n in modo che
$1-\left(\frac{3}{5}\right)^n > 0.90$, $\left(\frac{3}{5}\right)^n < 0.10$, $ln\left(\frac{3}{5}\right)^n < \ln(0.10)$, $n \cdot ln\left(\frac{3}{5}\right) < \ln(0.10)$,
notando che $ln\left(\frac{3}{5}\right) < 0$, avremo: $n > \frac{\ln(0.10)}{ln\left(\frac{3}{5}\right)} \cong 4.51$.

Quindi la squadra A deve giocare almeno 5 volte affinché la probabilità di vincere almeno una partita sia maggiore del 90%.

QUESITO 10

Si inscriva in una sfera di raggio R il cilindro di volume massimo. Si scelga poi a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cilindro di volume massimo.



Indichiamo con R il raggio della sfera, con r il raggio del cilindro e con h l'altezza del cilindro.
Il volume del cilindro è dato da: $V(cilindro) = \pi r^2 h$. Ma risulta:
$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ quindi: $V(cilindro) = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = f(h)$, $con\ 0 \le h \le 2R$
Tale volume è massimo se lo è $y = \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$; calcoliamo la derivata prima:

$$y' = R^2 - \frac{h^2}{4} + h\left(-\frac{1}{8}h\right) = -\frac{3}{8}h^2 + R^2 \ge 0\ \ se\ \ h^2 \le \frac{8}{3}R^2\ \ ,\ -R\sqrt{\frac{8}{3}} \le h \le R\sqrt{\frac{8}{3}}$$

Quindi, con le limitazioni su h, la funzione è crescente se $0 < h < R\sqrt{\frac{8}{3}}$ e decrescente se $R\sqrt{\frac{8}{3}} < h < 2R$: la funzione ha quindi un massimo (assoluto) per $h = R\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$.
Per tale valore di h si ha: $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = R^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}R^2 = \frac{R^2}{3}$, $r = \frac{R\sqrt{3}}{3}$
Il cilindro di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R è quello di altezza $\frac{2}{3}R\sqrt{6}$ e raggio di base $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. Calcoliamo i volumi dei due solidi:

$$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi R^3\ ;\ \ V(cilindro) = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}R\sqrt{6}\ \right) = \frac{2\pi R^3\sqrt{6}}{9}$$

La probabilità richiesta è:

$$p = \frac{V(cilindro)}{V(sfera)} = \frac{\frac{2\pi R^3\sqrt{6}}{9}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cong 0.408 \cong 40.8\%$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria