Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

È dato il segmento $|\overline{AB}| = 2$. Dal punto A si tracci una semiretta s formante un angolo acuto α con la direzione AB e si denoti con C la proiezione ortogonale del punto B sulla semiretta s. Si costruisca su $\overline{AC}$, esternamente al triangolo ABC, un triangolo equilatero ACM.

a) Detto O il punto medio di $\overline{AB}$, si calcoli il valore di $|\overline{OM}|^2$ e lo si esprima in funzione di $x = \tan\alpha$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{\left(x + \sqrt{3}\right)^2}{x^2 + 1}.$$

b) Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico Γ.

c) Si dica per quale valore di α si ha il massimo di $\overline{OM}$.

d) Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dagli assi cartesiani e dall'arco di Γ i cui estremi hanno ascisse $-\sqrt{3}$ e 0.

Problema 2

Si consideri, nell'intervallo chiuso $[0, 2\pi]$, la funzione:

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico Λ.

b) Si scriva l'equazione della tangente a Λ nel punto di flesso e si calcoli l'area del triangolo T_1 che essa forma con gli assi cartesiani e quella del triangolo T_2 che forma con l'asse x e l'asintoto verticale.

c) Si calcoli l'area della superficie piana Σ, delimitata dalla curva Λ e dagli assi cartesiani nell'intervallo chiuso $[0, \pi/2]$.

d) Si scelga a caso un punto all'interno della superficie piana Σ. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno al triangolo T_1.

Questionario

1. Una fotografa naturalista individua un uccello raro appollaiato su un albero. L'angolo di elevazione è di 14° e il telemetro dell'apparecchio fotografico indica che tra l'uccello e l'obiettivo vi è una distanza di 103 metri. Ella avanza lentamente, sino ad arrivare in un punto per cui l'angolo di elevazione è di 20°. A che distanza si trova ora l'uccello dall'obiettivo della fotografa?

2. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$$
quando x tende a 0^+.

3. Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

4. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = \log_{\sin x} x^4$$
nel punto P di ascissa $x = 1$.

5. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva

$$y = \sqrt{\frac{x}{1+x}},$$

dall'asse x e dalle rette $x = 1$, $x = 3$.

6. Si dimostri che l'area di una sfera di raggio r, l'area della superficie totale del cilindro circoscritto, e l'area della superficie totale del cono equilatero circoscritto, sono proporzionali ai numeri 4, 6, 9.

7. Con l'aiuto di una calcolatrice si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $e^x - 2 = 0$, con punto iniziale $x_0 = 1$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

8. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della regione piana, delimitata dalla curva di equazione $y = \sqrt{\sin x}$ e dall'asse delle x nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

9. La squadra A ha probabilità $2/5$ di vincere ogniqualvolta gioca. Quante partite deve giocare perché la probabilità che ne vinca almeno una sia maggiore del 90%?

10. Si inscriva in una sfera di raggio r il cilindro di volume massimo. Si scelga poi a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cilindro di volume massimo.