

**Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 dei 10 quesiti del questionario.**

**PROBLEMA 1**

E' dato un quadrato ABCD di lato  $AB = a$

Da A si conduca una semiretta, che incontra il lato BC in E e il prolungamento del lato DC in F.

1. Si calcoli il rapporto:

$$\frac{BE + DF}{AB},$$

espresso in funzione di  $x = \widehat{BAE}$ , controllando che risulta :

$$f(x) = \operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x.$$

2. Si studi la funzione  $f(x)$  e si tracci il suo grafico  $\gamma$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi$ .

3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva  $\gamma$  e dalla retta di equazione  $y = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ .

4. La regione finita di piano delimitata dalla curva  $\gamma$  e dall'asse  $x$  nell'intervallo  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  è la base di un solido  $S$ , le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di  $S$ .

**PROBLEMA 2**

Si consideri la funzione:

$$f(x) = (3-x)\sqrt{x+3}.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ .

2. Si scriva l'equazione della tangente  $t$  alla curva  $\gamma$  nel punto di intersezione con l'asse  $y$  e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.

3. Si calcoli il volume del cono  $S$  generato da una rotazione completa attorno all'asse  $x$  del succitato triangolo e il volume del solido  $S'$  generato dalla rotazione attorno all'asse  $x$  della porzione di piano, situata nel I quadrante, limitata dalla curva  $\gamma$  e dagli assi cartesiani.

4. Si scelga a caso un punto all'interno del cono  $S$ . Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al solido  $S'$ .

**QUESTIONARIO**

1. Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di  $30^\circ$ . Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a  $20^\circ$ , con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

2. La funzione:

$$f(x) = \frac{1}{(e^{1/x} - 1)^2},$$

non è definita nel punto  $x = 0$ , che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della  $f(x)$  per  $x$  tendente a zero da sinistra e per  $x$  tendente a zero da destra.

3. La retta di equazione  $x = 8$  seca la parabola di equazione  $x = y^2 - 4y + 3$  nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di  $180^\circ$  intorno all'asse della parabola.
4. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = (3 \cos x + \sin^2 x - 3)^{\cos x}.$$

Che cosa succederebbe se l'esponente fosse  $\sin x$ ?

5. Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .
6. Si determini un numero positivo N tale che, per  $x > N$ , la funzione  $f(x) = 2^{0,3x}$  è sempre maggiore della funzione  $g(x) = x^{30}$ .
7. Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{2} - 1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx,$$

si calcoli un'approssimazione di  $\frac{\pi}{2}$ , utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8. La regione del I quadrante delimitata dall'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  e dagli assi cartesiani è la base di un solido F le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse  $y$ , sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di F.
9. Un bersaglio è costituito da tre cerchi concentrici, i cui raggi misurano rispettivamente 5, 3 e 1. Un arciere ha probabilità  $\frac{1}{2}$  di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che lo colpisca in un punto appartenente al cerchio di raggio 3 ma non a quello di raggio 1?
10. Sia  $P$  un punto fissato su una circonferenza; quale è la probabilità che prendendo su questa due punti a caso  $A$  e  $B$ , l'angolo  $\widehat{APB}$  sia acuto? Si illustri il ragionamento seguito.

Durata massima della prova: 6 ore.

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.