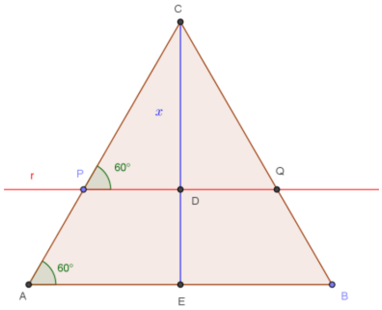
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2012 – PROBLEMA 1

Il triangolo ABC è equilatero di lato unitario. La retta r parallela ad AB interseca i lati AC e BC, rispettivamente, nei punti P e Q .



1)

Si indichi con x la distanza di r dal vertice C. Per quale valore di x, nel quadrilatero ABQP si può inscrivere una circonferenza? Quale è la lunghezza del suo raggio?

Calcoliamo i lati mancanti del quadrilatero ABQP.

$$PD = x\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad quindi \;\; PQ = 2x\frac{\sqrt{3}}{3};$$

Essendo equilatero anche il triangolo PQC risulta: $PC = PQ = 2x\frac{\sqrt{3}}{3}$, quindi:

$$AP = BQ = 1 - 2x\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Risulta poi:

$$AB + PQ = 1 + 2x\frac{\sqrt{3}}{3} \;\; ; \quad AP + BQ = 2\left(1 - 2x\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Affinché il quadrilatero ABQP sia circoscrittibile ad una circonferenza deve essere:

$$AB + PQ = \; AP + BQ \; , \;\; da\ cui: 1 + 2x\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\left(1 - 2x\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \qquad 3 + 2x\sqrt{3} = 6 - 4x\sqrt{3} \, ,$$

$$x = \frac{3}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Per trovare il raggio della circonferenza inscritta ricordiamo che l'area S di un poligono circoscritto ad una circonferenza di raggio r è data da: $S = pr$, dove p è il semiperimetro del poligono. Quindi: $p = \; AB + PQ = 1 + 2x\frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}$.

Calcoliamo l'area del poligono (trapezio), osservando che la somma delle basi è $\frac{4}{3}$; cerchiamo l'altezza DE.

$DE = CE - CD = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Quindi:

$$S = \frac{(AB + PQ) \cdot DE}{2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\,, \quad r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{2}{9}\sqrt{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{6}\sqrt{3} = r\,.$$

2)

Si esprima in funzione di x il rapporto fra l'area del triangolo PQC e l'area del quadrilatero ABQP, verificando che si ottiene la funzione:

$$f(x) = \frac{4x^2}{3 - 4x^2}$$

Il rapporto f(x) assume tutti i valori reali positivi? Si giustifichi la risposta.

Cerchiamo le due aree. PQC è un triangolo equilatero, quindi la sua area è:

$$A(PQC) = \frac{l^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot PQ^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(2x\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}x^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2$$

$$A(ABQP) = \frac{(AB + PQ) \cdot DE}{2} = \frac{\left(1 + 2x\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - x\right)}{2} = \frac{(3 + 2x\sqrt{3})(\sqrt{3} - 2x)}{12} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - 4x^2\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{12}(3 - 4x^2)$$

$$\frac{A(PQC)}{A(ABQP)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x^2}{\frac{\sqrt{3}}{12}(3 - 4x^2)} = \frac{4x^2}{3 - 4x^2} = f(x) \qquad c.v.d.$$

Notiamo che x ha le seguenti limitazioni geometriche: $0 < x < \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Dobbiamo stabilire se, per ogni k positivo è soddisfatta l'equazione $\frac{4x^2}{3-4x^2} = k$.

$$\frac{4x^2}{3 - 4x^2} = k \;\Rightarrow\; 4x^2 = k(3 - 4x^2) \;\Rightarrow\; 4(1 + k)x^2 = 3k\,, \qquad x^2 = \frac{3k}{4(1 + k)}\;;$$

Per k positivo si ha: $x = \pm\sqrt{\frac{3k}{4(1+k)}}$; dalla condizione $0 < x < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ segue $0 < x < \frac{3}{2}$

quindi:

$$0<\frac{3k}{4(1+k)}<\frac{3}{2}\ ,\quad \begin{cases}\dfrac{3k}{4(1+k)}>0\\ \dfrac{3k}{4(1+k)}<\dfrac{3}{2}\end{cases}\ ,\quad \begin{cases}\dfrac{3k}{4(1+k)}>0\\ \dfrac{3k}{4(1+k)}<\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta per ogni k positivo; analizziamo la seconda disequazione (in cui supponiamo k positivo):

$k<2(1+k)\ ,\quad k>-2\ :soddisfatta\ se\ k\ positivo.$

Possiamo quindi affermare che la f(x) assume tutti i valori reali positivi, con $x=\sqrt{\frac{3k}{4(1+k)}}$.

3)

Si studi la funzione f senza tener conto dei limiti geometrici del problema e se ne tracci il grafico γ.

Dobbiamo studiare (a prescindere dai limiti geometrici) la funzione:

$$f(x)=\frac{4x^2}{3-4x^2}$$

Si tratta di una funzione razionale fratta, definita per ogni $x\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, pari (quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y).

Se x=0, y=0; se y=0, x=0 (doppio, quindi tangente orizzontale).

Studiamo il **segno della funzione**: il numeratore è sempre maggiore o uguale a zero; il denominatore è positivo se: $3-4x^2>0,\ \ 4x^2-3<0\ ,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$: in tale intervallo la funzione è positiva (escluso x=0 dove si annulla).

Calcoliamo i **limiti**:

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2}{3-4x^2}=-1$: quindi abbiamo l'asintoto orizzontale y=1.

$\lim_{x\to\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\frac{4x^2}{3-4x^2}=\infty$: asintoti verticali $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Studiamo la **monotonia**:

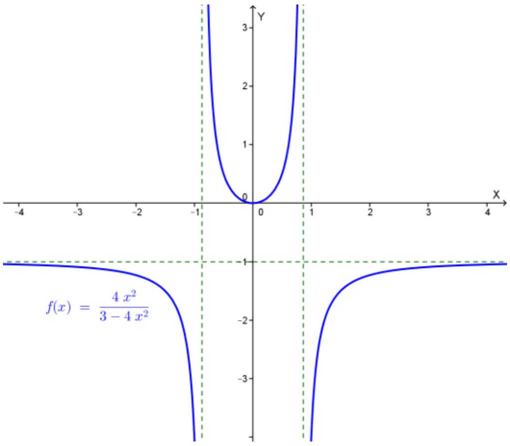
$$f'(x)=\frac{24x}{(3-4x^2)^2}\geq 0\ \ se\ \ \ x\geq 0\ \ (nel\ dominio).$$

Quindi la funzione è crescente per x>0 (nel dominio) e decrescente per x<0 (nel dominio); x=0 è punto di minimo relativo (con ordinata 0).

Studiamo la **concavità**:

$f''(x) = \frac{72(4x^2+1)}{(3-4x^2)^3} > 0 \ se \ 3 - 4x^2 > 0, \ \ 4x^2 - 3 < 0 \ , \ -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$: il grafico volge la concavità verso l'alto dove la funzione è positiva e verso il basso dove è negativa; non ci sono flessi.

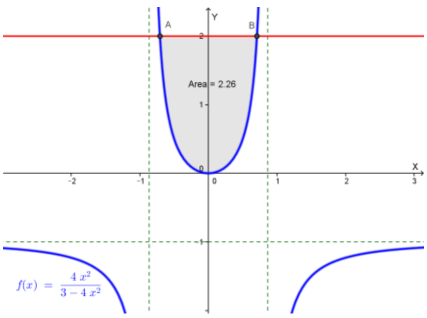
Il grafico della funzione è quindi il seguente:



4)

Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da γ e dalla retta di equazione $y = 2$.

La regione richiesta è indicata nella figura seguente:



Cerchiamo le intersezioni fra la curva γ e la retta di equazione y=2.
$\frac{4x^2}{3-4x^2} = 2\,,\ \ 4x^2 = 6 - 8x^2,\ \ x^2 = \frac{1}{2}\ \ , x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Data la simmetria del grafico rispetto all'asse delle y l'area richiesta è data da:

$$Area = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2 - \frac{4x^2}{3-4x^2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{6-12x^2}{3-4x^2}\right) dx = 6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{2-4x^2}{3-4x^2}\right) dx =$$

Cerchiamo una primitiva di $\left(\frac{2-4x^2}{3-4x^2}\right)$.

$$\int\left(\frac{2-4x^2}{3-4x^2}\right)dx=\int\left(\frac{3-4x^2-1}{3-4x^2}\right)dx=\int\left(1+\frac{1}{4x^2-3}\right)dx=x+\int\left(\frac{1}{4x^2-3}\right)dx=$$
$$=x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2-\frac{3}{4}}\,dx$$

Osserviamo che:

$$\frac{1}{x^2-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{A}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{B}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{A\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+B\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Deve quindi essere:

$$x(A+B)+\frac{\sqrt{3}}{2}(B-A)=1$$

Per il Principio di identità dei polinomi deve essere:

$$\begin{cases}A+B=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}(B-A)=1\end{cases}\;;\quad\begin{cases}A=-B\\ \frac{\sqrt{3}}{2}(2B)=1\end{cases}\;;\quad\begin{cases}A=-\frac{\sqrt{3}}{3}\\ B=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

Si ha pertanto:

$$\int\frac{1}{x^2-\frac{3}{4}}\,dx=\int\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)dx=-\frac{\sqrt{3}}{3}\,ln\left|x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}\,ln\left|x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+C=$$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|+C$; quindi:

$$Area=6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{2-4x^2}{3-4x^2}\right)dx=6\left[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{2-4x^2}{3-4x^2}\right)dx\right]=6\left[x+\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\cdots=\left[3\sqrt{2}+\sqrt{3}ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]u^2\cong 2.2573\cong 2.26\,u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria