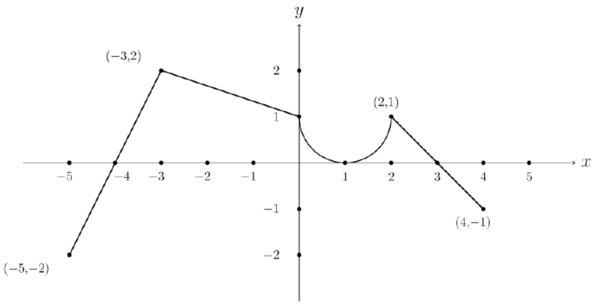
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2012 – PROBLEMA 2

Il grafico della funzione g, disegnato sotto, consiste di tre segmenti e di una semicirconferenza (con raggio 1 e centro (1, 1)).



Sia f la funzione definita da $f(x) = \int_{-3}^{x} g(t)dt$.

1)

Si determinino $f(0)$ *e* $f'(0)$.

Calcoliamo f(0), dato da: $f(0) = \int_{-3}^{0} g(t)dt$. In base al significato geometrico dell'integrale definito tale integrale rappresenta l'area del trapezio con base maggiore di misura 2, base minore di misura 1 e altezza 3, quindi:

$$f(0) = \int_{-3}^{0} g(t)dt = \frac{(2+1)\cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$$

Calcoliamo $f'(0)$, osservando che, in base al teorema di Torricelli risulta: $f'(x) = g(x)$, quindi:

$f'(0) = g(0) = 1$ (come si deduce dal grafico fornito).

2)

Si trovi il valore di x, −5 < x < 4 , in cui f presenta il massimo assoluto e si trovi altresì il minimo assoluto di f nell'intervallo chiuso, −5 ≤ x ≤ 4.

In base a quanto detto nel punto precedente lo studio del segno di $f'(x)$ equivale allo studio del segno di g(x). Pertanto:

$f'(x) > 0 \; se: -4 < x < 1 \;\; e \;\; 1 < x < 3$

$f'(x) < 0 \;\; se: \; -5 < x < 4 \;\; e \;\; 3 < x < 4$

$f'(x) = 0 \; se \;\; x = -4, x = 1, x = 3.$

La funzione f è quindi crescente da -4 a 3 (in x=1 abbiamo un flesso a tangente orizzontale) e decresce da -5 a -4 e da 3 a 4.

Possiamo quindi dire che per x=3 abbiamo un massimo relativo; per stabilire se x=3 è anche punto di massimo assoluto dobbiamo confrontare f(3) con f(-5).

$$f(3) = \int_{-3}^{3} g(t)dt =$$
$$= (Area\ del\ trapezio\ da -3\ a\ 0) +$$
$$+(Area\ rettangolo\ di\ lati\ 2\ e\ 1\ meno\ area\ semicerchio\ di\ raggio\ 1) +$$
$$+ (Area\ triangolo\ rettangolo\ da\ 2\ a\ 3) =$$
$$= \frac{9}{2} + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = 7 - \frac{\pi}{2} \cong 5.43 = f(3)$$

$$f(-5) = \int_{-3}^{-5} g(t)dt = -\int_{-5}^{-3} g(t)dt = -\begin{bmatrix} -Area(triangolo\ da -5\ a -4) + \\ +Area\ (triangolo\ da -4\ a -3) \end{bmatrix} =$$
$$= -[-1 + 1] = 0 = f(-5).$$

Quindi il massimo assoluto si ha per x=3 e vale $7 - \frac{\pi}{2}$.

Abbiamo un minimo relativo per x=-4 e per vedere se è anche minimo assoluto dobbiamo confrontare $f(-4)\ con\ f(4)$.

$$f(-4) = \int_{-3}^{-4} g(t)dt = -\int_{-4}^{-3} g(t)dt = -1\ (-area\ triangolo\ da -4\ a -3)$$

$$f(4) = \int_{-3}^{4} g(t)dt = \int_{-3}^{3} g(t)dt + \int_{3}^{4} g(t)dt = f(3) - \frac{1}{2} = 7 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{13}{2} - \frac{\pi}{2} \cong 4.9.$$

Quindi il minimo assoluto si ha per x=-4 e vale -1.

3)

Si trovino i valori di x, −5 <x < 4 , in cui il grafico di f presenta punti di flesso.

Dobbiamo studiare il segno della derivata seconda di f, che è uguale alla derivata prima di g'; dal grafico si osserva facilmente che g' cambia segno in x=-3 (g passa da crescente a decrescente), in x=1 (g passa da decrescente a crescente) ed in x=2 (g passa da crescente a decrescente).

Quindi f presenta punti di flesso in $x = -3, \; x = 1 \; e \; x = 2.$

Con la collaborazione di Angela Santamaria