

Scuole italiane all'estero (Americhe) 2012 – Quesiti

QUESITO 1

Un docente deve scegliere 4 studenti cui affidare un compito tra i 10 che ne hanno fatto richiesta. Quante scelte può fare?

Il numero di scelte è dato dal numero delle combinazioni di 10 oggetti a 4 a 4 (le possibili quaterne di studenti fra i 10):

$$c_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$$

QUESITO 2

Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 2 \cdot 3^{\frac{2}{x}}}{3^{\frac{2-x}{x}}}$$

Osserviamo che $3^{\frac{2}{x}} = \left(3^{\frac{1}{x}}\right)^2$, quindi l'infinito $3^{\frac{2}{x}}$ domina rispetto all'infinito $3^{\frac{1}{x}}$; quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 2 \cdot 3^{\frac{2}{x}}}{3^{\frac{2-x}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \cdot 3^{\frac{2}{x}}}{3^{\left(\frac{2}{x}-1\right)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \cdot 3^{\frac{2}{x}}}{3^{-1} \cdot 3^{\frac{2}{x}}} = -6$$

QUESITO 3

Sia $f(x) = \frac{(x+4)(x-3)(x+2)}{(x-6)(x-4)(x-2)}$ si calcoli $f'(x)$.

Risulta:

$$f'(x) = \frac{[(x-3)(x+2) + (x+4)(x+2) + (x+4)(x-3)](x-6)(x-4)(x-2)}{(x-6)^2(x-4)^2(x-2)^2} -$$

$$\frac{(x+4)(x-3)(x+2)[(x-4)(x-2) + (x-6)(x-2) + (x-6)(x-4)]}{(x-6)^2(x-4)^2(x-2)^2} =$$

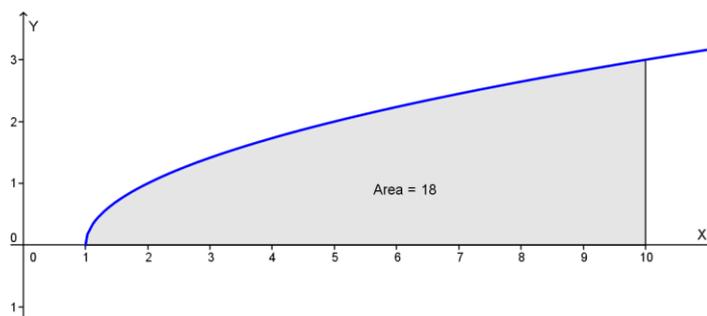
$$= \frac{(3x^2 + 6x - 10)(x^3 - 12x^2 + 44x - 48) - (x^3 + 3x^2 - 10x - 24)(3x^2 - 24x + 44)}{(x - 6)^2(x - 4)^2(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{1536 - 864x - 60x^2 + 108x^3 - 15x^4}{(x - 6)^2(x - 4)^2(x - 2)^2} = f'(x).$$

QUESITO 4

Sia R la regione del piano racchiusa tra il grafico di $y = \sqrt{x-1}$, la retta $x = 10$ e l'asse x . Si trovi l'area di R .

La regione richiesta è indicata nella seguente figura, dove il grafico della funzione si è ottenuto traslando verso destra di 1 il grafico di $y = \sqrt{x}$:



Risulta:

$$Area(R) = \int_1^{10} \sqrt{x-1} \, dx = \left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} = \frac{2}{3} \left(9^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} (3^3) = 18 \, u^2$$

QUESITO 5

Una particella si muove lungo l'asse x in modo tale che la sua velocità v al tempo t , per $0 \leq t \leq 5$, è data da $v(t) = \ln(t^2 - 3t + 3)$. Qual è l'accelerazione della particella al tempo $t = 4$?

Ricordiamo che l'accelerazione $a(t)$ è data da:

$$a(t) = v'(t) = \frac{2t - 3}{t^2 - 3t + 3}$$

Quindi: $a(4) = \frac{5}{7} \cong 0.714$.

QUESITO 6

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 5, 8\}$: determinare quanti numeri a due cifre si possono scrivere con gli elementi di A , considerando che sono ammesse le ripetizioni.

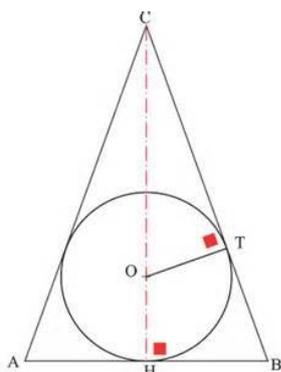
La cifra delle decine può essere scelta in 4 modi, come pure (essendo consentita la ripetizione) la cifra delle unità; quindi si hanno 16 possibili numeri.

Si tratta delle disposizioni con ripetizione di 4 oggetti a 2 a 2, date da:

$$D_{4,2}^* = 4^2 = 16$$

QUESITO 7

Si determini il cono di volume minimo circoscritto ad una sfera di raggio R .



Poniamo l'altezza CH del cono uguale ad x : $CH=x$, con $x > 2R$. Per la similitudine fra i triangoli HBC e TCO risulta:

$CT:OT=CH:BH$; inoltre:

$$CT = \sqrt{OC^2 - OT^2} = \sqrt{(x - R)^2 - R^2} = \sqrt{x^2 - 2Rx}$$

Pertanto:

$$\sqrt{x^2 - 2Rx}:R = x:BH \quad , \quad BH = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}} = \frac{R\sqrt{x^2 - 2Rx}}{x - 2R}$$

Il volume del cono è pertanto:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot BH^2 \cdot CH = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x}{x - 2R} \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x^2}{x - 2R}, \quad \text{con } x > 2R$$

Tale volume è minimo se lo è:

$$y = \frac{x^2}{x - 2R}$$

$$y' = \frac{x(x - 4R)}{(x - 2R)^2} \geq 0 \quad \text{se } x \geq 4R$$

Quindi y è crescente se $x > 4R$ e decrescente se $0 < x < 4R$: $x = 4R$ è punto di minimo assoluto.

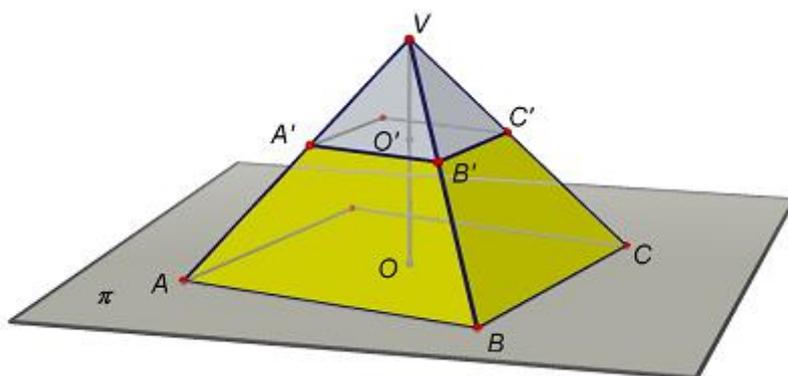
Il volume del cono circoscritto alla sfera di raggio R è minimo quando la sua altezza è uguale a $4R$; il volume del cono vale in tal caso $\frac{8}{3}\pi R^3$.

N.B.

Il quesito è stato assegnato nella sessione suppletiva del PNI del 2002 (nel problema 2).

QUESITO 8

Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Come si può procedere per esprimere il volume del tronco in funzione di a , b e h ?



Per trovare il volume del tronco di piramide si sottrae al volume della piramide $VABCD$ quello della piramide $VA'B'C'D'$.

Poniamo $VO' = x$, $O'O = h$ (l'altezza del tronco), quindi $VO = h + x$.

Per similitudine si ha: $\frac{VO'}{VO} = \frac{b}{a}$ (a è il lato della base maggiore) da cui ricaviamo

$$x = \frac{bh}{a-b} = VO'$$

$VO = h + x = \frac{ah}{a-b}$. Il volume del tronco è dato quindi da:

$$\frac{1}{3}a^2 \frac{ah}{a-b} - \frac{1}{3}b^2 \frac{bh}{a-b} = \frac{1}{3}h(a^2 + b^2 + ab) = \text{Volume tronco}$$

N.B.

Il quesito è stato assegnato nella sessione suppletiva del liceo di ordinamento del 2003 (nel problema 2).

Con la collaborazione di Angela Santamaria