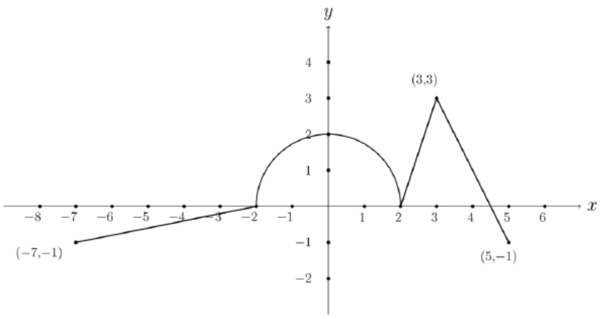
Scuole italiane all'estero (Europa) 2012 – PROBLEMA 1

La funzione f è definita e derivabile sull'intervallo chiuso [-7; 5] ed è f(0)=5. Il grafico di $y = f'(x)$*, la derivata di f, consiste di tre segmenti e una semiconferenza di raggio 2 e centro in O, come indicato nella figura sotto.*



1)

Si determinino f(3) e f(-2).

La funzione integrale $\int_0^x f'(t)dt$ è una funzione F(x) tale che $F'(x) = f'(x)$, quindi F(x), a meno di una costante additiva, non è altro che f(x), perciò:

$f(x) = \int_0^x f'(t)dt + k$; e siccome f(0)=k, essendo f(0)=5 si ha k=5. Pertanto:

$$f(3) = \int_0^3 f'(t)dt + 5$$

Ma $\int_0^3 f'(t)dt$ non è altro che l'area sottesa dal grafico di f'(x) tra 0 e 3, quindi:

$$\int_0^3 f'(t)dt = \frac{1}{4}(\pi \cdot 2^2) + \frac{1 \cdot 3}{2} = \pi + \frac{3}{2}$$

Pertanto:

$$f(3) = \int_0^3 f'(t)dt + 5 = \pi + \frac{3}{2} + 5 = \pi + \frac{13}{2} = f(3)$$

Con un ragionamento analogo si calcola f(-2).

$$f(-2) = \int_0^{-2} f'(t)dt + 5 = -\int_{-2}^0 f'(t)dt + 5 = -\frac{1}{4}(\pi \cdot 2^2) + 5 = 5 - \pi = f(-2)$$

2)

Si determinino le ascisse di ciascun punto di flesso del grafico di $y = f(x)$, illustrando il ragionamento seguito.

Dal significato geometrico della derivata di una funzione e dal grafico della derivata prima di f(x) si deduce il segno della derivata seconda (derivata della derivata prima); la derivata seconda è positiva dove la derivata prima cresce e negativa dove decresce, quindi:

$f''(x) > 0 \quad se \quad -7 < x < 0 \ , \ 2 < x < 3$: in tali intervalli il grafico della f volge la concavità verso l'alto.

$f''(x) < 0 \quad se \quad 0 < x < 2 \ , \quad 3 < x < 5$: in tali intervalli il grafico della f volge la concavità verso il basso.

Quindi il grafico cambia concavità per x=0, x=2, x=3: questi sono pertanto punti di flesso. Notiamo che per x=2 si annulla la derivata prima, quindi x=2 è punto di flesso a tangente orizzontale.

3)

La funzione g è definita da $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$. Si determinino le scisse, con -7<x<5,dei punti critici di g, specificando se si tratta di massimo, di minimo o né l'uno né l'altro ed esponendo il ragionamento seguito.

Ricordiamo che i punti critici sono i punti in cui si annulla la derivata prima.

$g'(x) = f'(x) - x = 0 \ \ se \ \ f'(x) = x$

Osservando il grafico della $f'(x)$ si può notare che un punto è x=3 ed un altro si ottiene intersecando y=x con la parte della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ che si trova nel primo quadrante, cioè: $y = \sqrt{4 - x^2}$; si ha:

$\sqrt{4 - x^2} = x \ , \ \ con\ x > 0;$

$4 - x^2 = x^2 \ , \ \ x^2 = 2 \ , \ \ x = \sqrt{2}.$

I punti critici della g sono quindi i punti di ascissa $x = 3 \ \ e \ \ x = \sqrt{2}.$

Analizziamo x=3 .

Sempre dal grafico della $f'(x)$ osserviamo che in un intorno di x=3 (3 escluso) risulta $f'(x) < x$ quindi $g'(x) < 0$ pertanto la g è decrescente in un intorno del 3, che pertanto non è punto di massimo né di minimo.

Analizziamo $x = \sqrt{2}$.

Intersecando $y = \sqrt{4 - x^2}$ con y=x osserviamo che in un intorno sinistro di $x = \sqrt{2}$ risulta

$\sqrt{4 - x^2} > x$ quindi $g'(x) > 0$; in un intorno destro di $x = \sqrt{2}$ risulta invece $\sqrt{4 - x^2} < x$ quindi $g'(x) < 0$: quindi g è crescente in un intorno sinistro de punto e decrescente in un intorno destro, pertanto $x = \sqrt{2}$ è punto di massimo relativo.

Con la collaborazione di Angela Santamaria