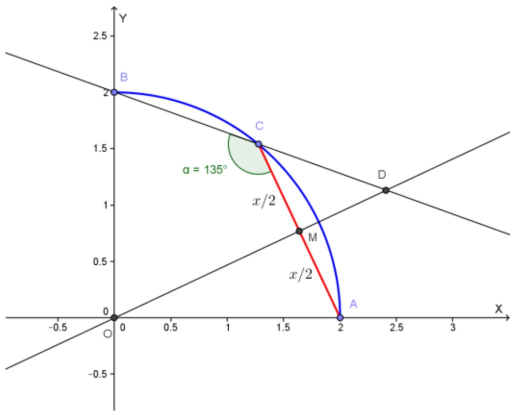
Scuole italiane all'estero (Europa) 2012 – PROBLEMA 2

Si consideri l'arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio 1.

1)

Sia C un punto di AB, M il punto medio della corda AC e D il punto di incontro delle rette OM e BC. Si provi che il triangolo CMD è rettangolo isoscele qualunque sia la scelta di C sull'arco AB, e, successivamente, si esprima in funzione $x = AC$ il rapporto $\frac{CD^2}{AM^2+OA^2}$ controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+4}$$



L'angolo ACB misura 135°, poiché il suo corrispondente angolo al centro misura 270°. Quindi l'angolo MCD vale 45°. Inoltre OD è perpendicolare ad AC, poiché passa per il centro della circonferenza e per il punto medio della corda. Segue che il triangolo CDM è rettangolo in M ed essendo l'angolo MCD di 45° anche l'angolo MDC sarà di 45°:
il triangolo MCD è quindi rettangolo isoscele per ogni scelta di C.

Calcoliamo il rapporto richiesto:

$$AM = \frac{x}{2}, \qquad OA = 1, \qquad CD = CM \cdot \sqrt{2} = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{CD^2}{AM^2 + OA^2} = \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{4} + 1} = \frac{2x^2}{x^2+4} = f(x), \qquad con\ \ 0 \le x \le AB,\ \ cioè\ \ 0 \le x \le \sqrt{2}$$

2)

Si studi la funzione f(x), si tracci il suo grafico indipendentemente dai limiti geometrici e, indicato con γ il ramo appartenente al primo quadrante, si dica se esiste su γ un punto di ordinata massima e, in caso affermativo, lo si determini.

Dobbiamo studiare la funzione:

$$y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2+4}$$

La funzione è definita e continua su tutto R, si annulla per x=0 ed è positiva per tutti altri valori di x. Si verifica facilmente che è pari e che non ha altre intersezioni con gli assi cartesiani al di fuori di x=0 e y=0.

Per x che tende a $\pm\infty$ la funzione tende a 2, quindi abbiamo l'asintoto orizzontale y=2.

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{16x}{(\mathrm{x}^2+4)^2} \geq 0 \quad se \quad x \geq 0$$

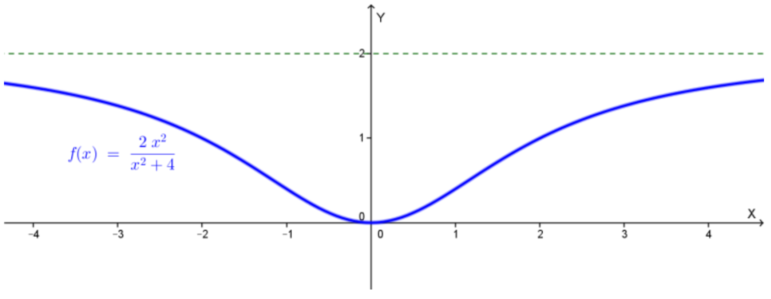
La funzione è crescente se x>0, decrescente se x<0 ed ha un minimo relativo (ed assoluto) in x=0, con ordinata y=0.
Non esiste un punto di ordinata massima nel primo quadrante.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{64-48x^2}{(\mathrm{x}^2+4)^3} \geq 0 \quad se \quad x^2 \leq \frac{4}{3}, \quad cioè: -\sqrt{\frac{4}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Il grafico quindi volge la concavità verso l'alto se $-\sqrt{\frac{4}{3}} < x < \sqrt{\frac{4}{3}}$ e verso il basso nella parte rimanente; abbiamo due flessi per $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ con ordinata $y = \frac{1}{2}$.

Il grafico della funzione è il seguente:



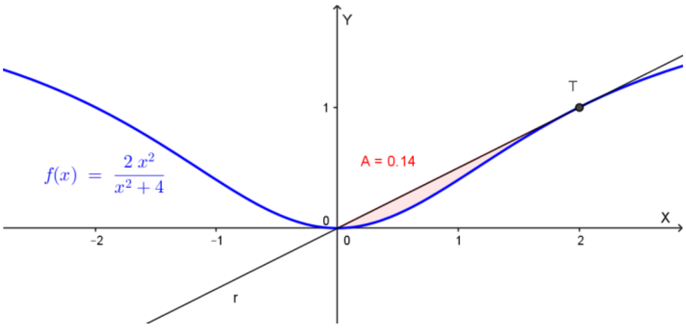
3)

Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da γ e dalla retta r, tangente al grafico di f(x) nel suo punto T di ascissa 2 .

Cerchiamo l'equazione della retta r. Il punto T ha coordinate $T = (2; 1)$. Risulta:

$$f'(2) = \frac{1}{2}\ ;\ \ r\colon\ y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)\ ;\ \ y = \frac{1}{2}x$$

Rappresentiamo graficamente la regione indicata:



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x - \frac{2x^2}{x^2+4}\right) dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x\, dx - \int_0^2 \left(\frac{2x^2}{x^2+4}\right) dx$$

Calcoliamo

$$\int \left(\frac{2x^2}{x^2+4}\right) dx = 2\int \left(\frac{x^2+4-4}{x^2+4}\right) dx = 2\int \left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right) dx = 2x - 8\int \left(\frac{1}{x^2+4}\right) dx =$$

$$= 2x - 8\int \frac{1}{4\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} dx = 2x - 2\int \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} dx = 2x - 4\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} dx =$$

$$= 2x - 4\cdot arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

Quindi l'area è data da:

$$Area = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2 - \left[2x - 4\cdot arctg\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 = 1 - [4 - 4\cdot arctg(1)] = 4\cdot\frac{\pi}{4} - 3 = \pi - 3 = 0.14$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria