Scuole italiane all'estero (Europa) 2012 – Quesiti

QUESITO 1

Quante sono tutte le funzioni iniettive da un insieme A di n elementi in un insieme B di m elementi?

Ad ogni elemento di A deve corrispondere uno ed un solo elemento di B ed inoltre ad elementi distinti in A devono corrispondere elementi distinti in B. Da ciò segue che deve essere $m \geq n$. Dobbiamo trovare il numero delle coppie ordinate (a, b) con a in A e b in B: il numero di tali coppie è uguale al numero delle disposizioni di m oggetti ad n ad n, quindi:

$$D_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

QUESITO 2

Tra tutti i settori circolari che hanno un perimetro di 100 metri, si determini quello di area massima.

Indicati con l la lunghezza dell'arco corrispondente al settore circolare e con R il raggio della circonferenza di cui fa parte il settore, abbiamo:
$l + 2R = 100$ (*)
L'area del settore circolare è uguale a:

$$Area = \frac{l \cdot R}{2}$$

Tale area è massima se lo è la quantità $l \cdot R = \frac{1}{2} \cdot l \cdot (2R)$ che è massima se lo è:
$l \cdot (2R)$. Ma la somma di l e $2R$ è costante (100), quindi il loro prodotto è massimo le due grandezze sono uguali, cioè se: $l = 2R$. Essendo $l + 2R = 100$ si ha:
$R = 25\ m$ ed $l = 75\ m$.
Osserviamo che, detta α l'ampiezza in radianti del settore circolare, si ha:
$\frac{l}{R} = \alpha$, quindi il massimo richiesto si ha quando: $\alpha = \frac{2R}{R} = 2\ radianti$.

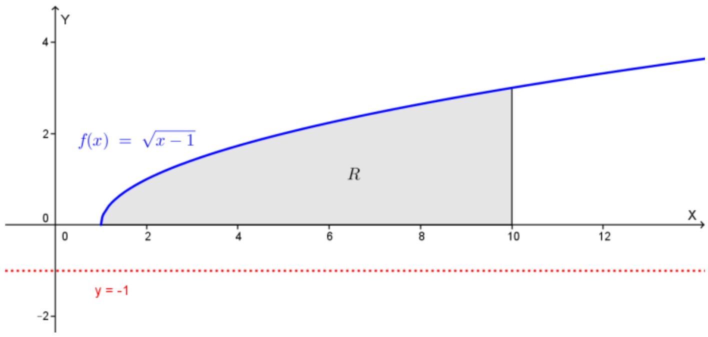
N.B.
Il massimo di $Area = \frac{l \cdot R}{2}$ si può determinare con il metodo delle derivate ponendo R=x (con 2R<100, da cui R<50) e ricavando dalla (*) $l = 100 - 2x$; quindi:

$Area = \frac{1}{2}x(100 - 2x)$; studiamo il massimo di $y = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$ $con\ \ x < 50$; risulta: $y' = -4x + 100 \geq 0\ \ se\ x \leq 25$. La funzione è quindi crescente da 0 a 25 e decrescente da 25 a 50: per x=25 si ha il massimo.

QUESITO 3

Sia R la regione del piano racchiusa tra il grafico $y = \sqrt{x-1}$ *, la retta* $x = 10$ *e l'asse x. Si trovi il volume del solido generato da R nella rotazione attorno alla retta* $y = 1$.

Il grafico della funzione si ottiene facilmente traslando a destra di 1 il grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x}$; la regione R è quindi la seguente:



Immaginando la retta y= -1 come asse x, il volume del solido è dato da:

$$V = \pi \int_1^{10} \left[\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 - 1\right] dx = \pi \int_1^{10} \left[\left(x-1+2\sqrt{x-1}+1\right) - 1\right] dx =$$

$$= \pi \int_1^{10} \left(x-1+2\sqrt{x-1}\right) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - x + 2 \cdot \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \pi \left[50 - 10 + \frac{4}{3} \cdot 27 - \frac{1}{2} + 1\right]$$

$$= \frac{153}{2}\pi\ u^3 \cong 240.332\ u^3 .$$

QUESITO 4

Si determini l'equazione della normale alla curva $y = e^{-x}$ *nel suo punto di ascissa* $x = ln4$ *.*

Il punto P in questione ha ordinata $y = e^{-\ln(4)} = \left(e^{\ln(4)}\right)^{-1} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$. Quindi:

$$P = \left(\ln(4)\,; \frac{1}{4}\right)$$

Risulta:

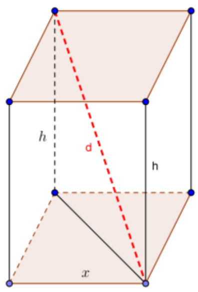
$y' = -e^{-x}$; quindi $y'(\ln(4)) = -\frac{1}{4}$; il coefficiente angolare della normale in P è quindi 4.

Normale in P: $y - \frac{1}{4} = 4(x - \ln(4)),\ y = 4x + \frac{1}{4} - 4\ln(4)$

QUESITO 5

Fra tutti i parallelepipedi a base quadrata con diagonale di misura d, si determini quello di volume massimo.

Indichiamo con d la diagonale del parallelepipedo, con x (con x>0) il lato del quadrato di base e con h l'altezza.



Risulta:

$$d = \sqrt{x^2 + x^2 + h^2} = \sqrt{2x^2 + h^2} \quad da\ cui \quad d^2 = 2x^2 + h^2,\ \ h^2 = d^2 - 2x^2$$

Il volume del parallelepipedo è dato da:

$V = x \cdot x \cdot h = x^2 \cdot h$; V è massimo se lo è $V^2 = x^4 \cdot h^2 = x^4 \cdot (d^2 - 2x^2) = y$

Il massimo può essere cercato con il metodo delle derivate, ma preferiamo proporre la soluzione per via elementare, meno usata.

$y = x^4 \cdot (d^2 - 2x^2) = \frac{1}{4}(2x^2)^2 \cdot (d^2 - 2x^2)$ che è massima se lo è:

$(2x^2)^2 \cdot (d^2 - 2x^2)$

Si tratta del prodotto di due potenze la cui somma delle basi è costante $(2x^2 + d^2 - 2x^2 = d^2)$; tale espressione è massima se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{d^2 - 2x^2}{1} \quad da\ cui\colon\ 6x^2 = 2d^2,\quad x^2 = \frac{1}{3}d^2,\quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

Per tale valore di x l'altezza risulta: $h = \sqrt{d^2 - 2x^2} = \sqrt{d^2 - \frac{2}{3}d^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}d = x$

Il parallelepipedo di volume massimo è quindi il cubo di spigolo $x = \frac{\sqrt{3}}{3}d$.

QUESITO 6

Si calcoli:

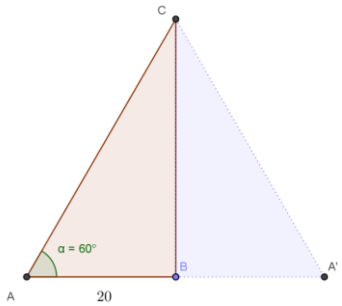
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x) + 3x}{sen(5x)}$$

Ricordiamo che per $x \to 0$ risulta: $\tan(3x) \sim 3x \quad e \quad sen(5x) \sim 5x$, cioè tan(3x) si comporta come (3x) e sen(5x) si comporta come (5x); quindi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x) + 3x}{sen(5x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x + 3x}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{6x}{5x} = \frac{6}{5}$$

QUESITO 7

Sia AB un segmento di lunghezza 20 *dm*. Si determini il luogo dei punti C dello spazio tali che $A\hat{B}C$ sia retto e $B\hat{A}C$ misuri $60°$.



Risulta: $BC = AB \cdot \tan(60°) = 20\sqrt{3}$.

C descrive la circonferenza di centro B e raggio BC nel piano passante per B e perpendicolare al segmento AB, come dire che C descrive la circonferenza di base del cono circolare retto con altezza AB e raggio di base BC.

QUESITO 8

Quanti sono i numeri di 6 cifre che contengono: 2 volte esatte la cifra 1, 2 volte esatte la cifra 2 e non contengono la cifra 0?

Dobbiamo contare i possibili modi con cui possiamo occupare due posti su sei con sette oggetti (le cifre 3,4,5,6,7,8,9).

Se le due cifre (oltre a 1 e 2) sono uguali, i possibili numeri (per ognuna delle sette cifre rimanenti) sono pari alle permutazioni di 6 oggetti di cui 2 uguali fra di loro (1), altri due uguali fra di loro (2) e altri due uguali fra di loro (una delle sette cifre da 3 a 9), quindi:

$$P_{6,(2,2,2)} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$$

Considerando le sette cifre, avremo quindi 90x7=630 possibili numeri con due cifre uguali ad 1, due cifre uguali a 2 e due cifre uguali fra di loro (da 3 a 9).

Se le due cifre (oltre a 1 e 2) sono diverse, le coppie possibili con cui possiamo riempire gli altri due posti a prescindere dall'ordine sono le combinazioni di 7 oggetti a due a due; tale numero deve essere moltiplicato per le permutazioni di 6 oggetti (le sei cifre), di cui 2 uguali fra di loro (1) e altri 2 uguali fra di loro (2). In totale avremo:

$$C_{7,2} \cdot P_{6,(2,2)} = \binom{7}{2} \cdot \frac{6!}{2!\,2!} = \frac{7 \cdot 6}{2!} \cdot \frac{6!}{2!\,2!} = 21 \cdot 180 = 3780$$

In totale avremo quindi:

$$630 + 3780 = 4410$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria