Liceo della comunicazione 2012 – PROBLEMA 1

Sia $f(x) = \sqrt{\ln^2(-x) - \ln x^2 + 1}$ *e sia* $g(x) = \sqrt{\ln^2(x) - \ln x^2 + 1}$

1)

Si determinino i domini di f e di g.

$f(x) = \sqrt{\ln^2(-x) - \ln x^2 + 1}$

$\begin{cases} -x > 0 \\ \ln^2(-x) - \ln x^2 + 1 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < 0 \\ \ln^2(-x) - 2\ln|x| + 1 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < 0 \\ \ln^2(-x) - 2\ln(-x) + 1 \geq 0 \end{cases}$

$\ln^2(-x) - 2\ln(-x) + 1 \geq 0$; $\quad (\ln(-x) - 1)^2 \geq 0 : per\ ogni\ x$.

Il dominio di f(x) è quindi: $-\infty < x < 0$.

$g(x) = \sqrt{\ln^2(x) - \ln x^2 + 1}$

$\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2(x) - \ln x^2 + 1 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2(x) - 2\ln|x| + 1 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2(x) - 2\ln(x) + 1 \geq 0 \end{cases}$

$\ln^2(x) - 2\ln(x) + 1 \geq 0$; $\quad (\ln(x) - 1)^2 \geq 0 : per\ ogni\ x$.

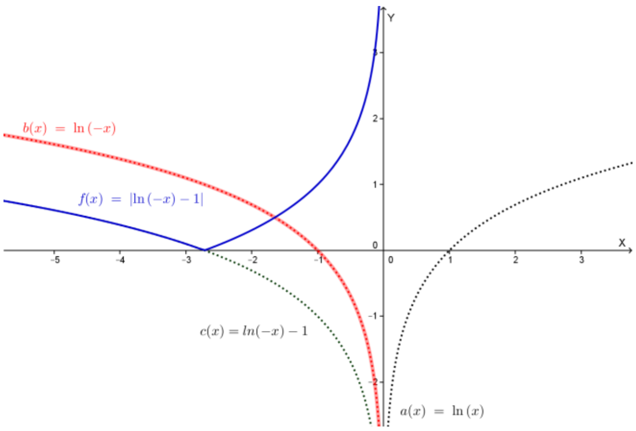
Il dominio di g(x) è quindi: $0 < x < +\infty$.

2)

Si disegnino, nel medesimo sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, i grafici di f e di g.

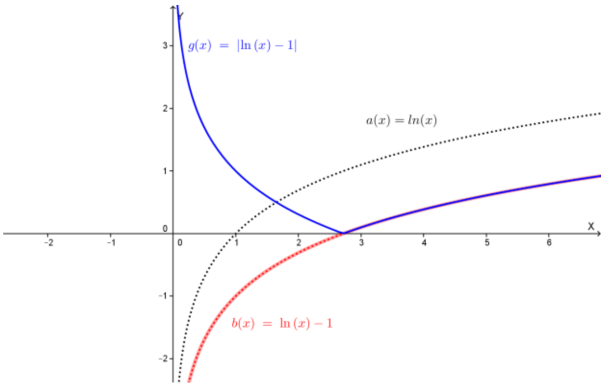
$f(x) = \sqrt{\ln^2(-x) - \ln x^2 + 1} = \sqrt{\ln^2(-x) - 2\ln(-x) + 1} = \sqrt{(\ln(-x) - 1)^2} = |\ln(-x) - 1|$

Il grafico di questa funzione si deduce da quello di y=ln(x) mediante le seguenti trasformazioni geometriche:
$y = \ln(x) = a(x)$;
$y = \ln(-x) = b(x)$: $simmetria\ rispetto\ all'assey$;
$y = \ln(-x) - 1 = c(x)$: $traslazione\ verso\ il\ basso\ di\ 1$;
$|\ln(-x) - 1| = f(x)$: $ribaltamento\ rispetto\ all'asse\ x\ della\ parte\ negativa$.



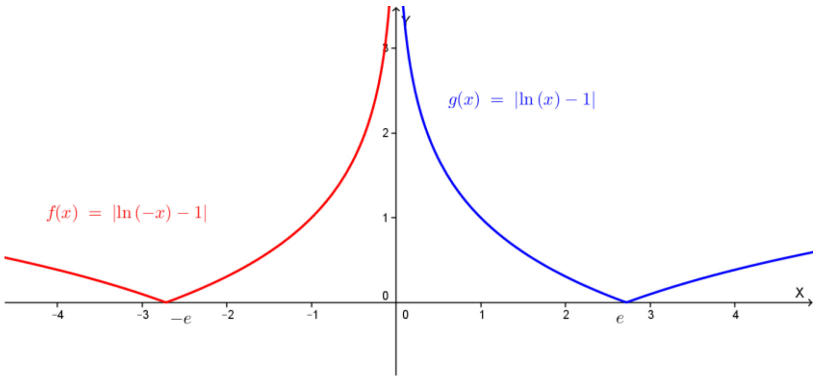
$g(x) = \sqrt{\ln^2(x) - \ln x^2 + 1} = \sqrt{(\ln(x) - 1)^2} = |\ln(x) - 1|$

Il grafico di questa funzione si deduce da quello di y=ln(x) mediante le seguenti trasformazioni geometriche:
$y = \ln(x) = a(x);$
$y = \ln(x) - 1 = b(x)$: $traslazione\ verso\ il\ basso\ di\ 1;$
$|\ln(x) - 1| = g(x)$: $ribaltamento\ rispetto\ all'assex\ della\ parte\ negativa.$



Osserviamo che risulta: g(x)=f(-x), quindi il grafico di g(x) è simmetrico rispetto all’asse y del grafico di f(x).

Rappresentiamo le due funzioni nello stesso piano cartesiano:



3)

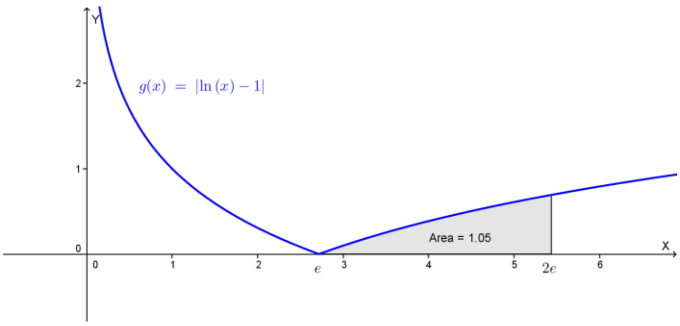
Si determinino, se esistono, le coordinate degli eventuali punti di discontinuità o di non derivabilità di f e di g rispettivamente.

Analizziamo la funzione $g(x) = \sqrt{\ln^2(x) - \ln x^2 + 1} = |\ln(x) - 1|$
Questa funzione è continua nel suo dominio (x>0) e derivabile per ogni $x \neq e$, dove c'è un punto angoloso. Determiniamo la derivata destra e la derivata sinistra in x=e.
Se x>e: y=ln(x)-1, quindi $y' = \frac{1}{x}$, $y'_+(e) = \frac{1}{e}$
Se 0<x<e: y=-ln(x)+1, quindi $y' = -\frac{1}{x}$, $y'_-(e) = -\frac{1}{e}$
In modo analogo si ragiona per f(x), che, come già notato è simmetrica di g(x) rispetto all'asse y, quindi ha un punto angoloso in x=-e.

4)

Si calcoli l'area compresa tra g(x) e l'asse x per $e \leq x \leq 2e$.

$g(x) = |\ln(x) - 1| = \ln(x) - 1 \quad se \quad x > e$



L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area = \int_e^{2e} (\ln(x) - 1)\, dx =$$

Calcoliamo per parti $\int \ln(x)\, dx$.

$\int \ln(x)\, dx = \int (\mathrm{x})' \ln(x)\, dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + K$; quindi:

$$\int_e^{2e} (\ln(x) - 1)\, dx = [x \ln(x) - x - x]_e^{2e} = [x \ln(x) - 2x]_e^{2e} = 2e(ln2e) - 4e - (e - 2e) =$$

$$= 2e(ln2 + lne) - 3e = 2e(ln2) + 2e - 3e = 2e(ln2) - e = e(ln4 - 1) \cong 1.05\ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria