Liceo della comunicazione 2012 – PROBLEMA 2

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

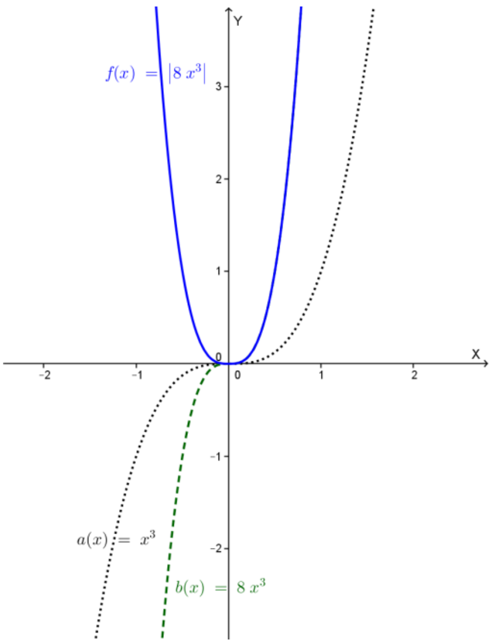
$$f(x) = |8x^3| \quad e \quad g(x) = sen(\pi x)$$

1)

Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g .

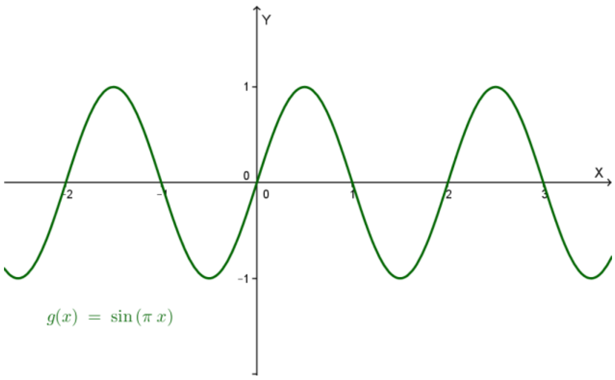
$f(x) = |8x^3|$

Il grafico di f si ottiene facilmente dalla cubica $y = x^3$ mediante una dilatazione verticale di fattore 8 e ribaltando rispetto all'asse x la parte negativa:

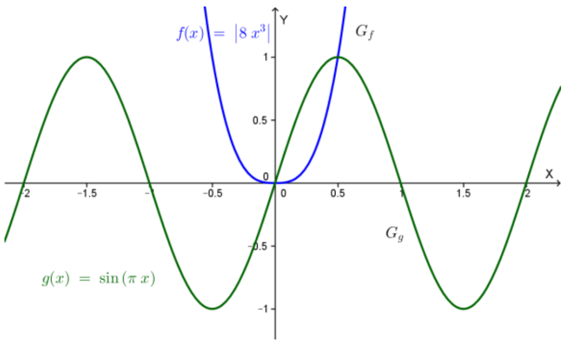


$g(x) = sen(\pi x)$

Il grafico di g si ottiene dal grafico di $y = sen(x)$ mediante una contrazione orizzontale di fattore π , è quindi una funzione sinusoidale di periodo $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

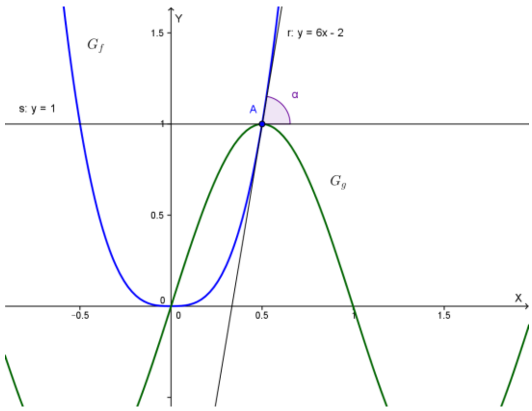


Rappresentiamo f e g nello stesso piano cartesiano:



2)

Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{2}$. Quale è la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto individuato da r e da s?



Il punto di ascissa ½ ha coordinate $A = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. La tangente in A a g è immediata: $s: y = 1$.

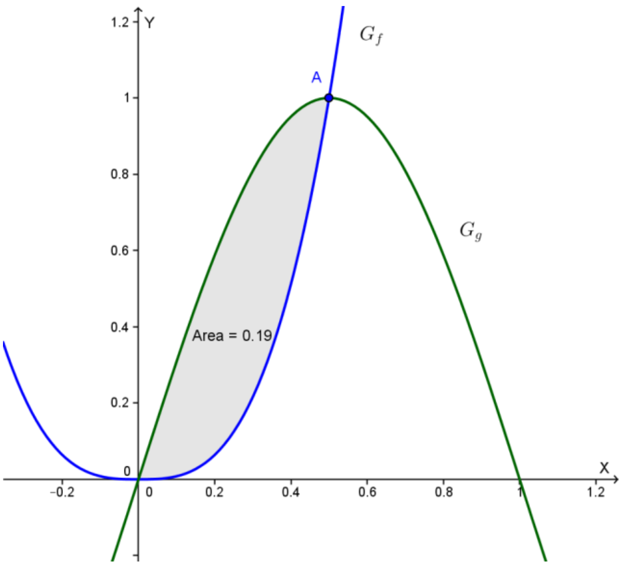
Cerchiamo la tangente r in A ad f. Risulta: $f'(x) = 24x^2,\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6$, quindi:

$r:\ y - 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $y = 6x - 2$. L'angolo (acuto) α formato da r ed s è tale che:

$$tg\alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{6-0}{1}\right| = 6\ ,\quad \alpha = arctg(6) \cong 80.538° = 80° + (0.538 \cdot 60\ )' = 80°32'$$

3)

Si calcoli l'area della regione R racchiusa tra G_f e G_g .



L'area della regione R si ottiene mediante il seguente integrale:

$$Area(R) = \int_0^{\frac{1}{2}} (sen(\pi x) - 8x^3)dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) - 2x^4\right]_0^{\frac{1}{2}} = 0 - \frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{\pi}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8}\right)\ u^2 \cong 0.19\ \ u^2\ .$$

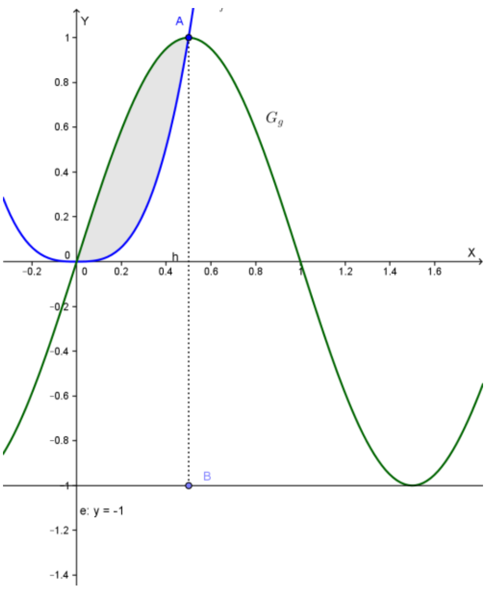
4)

Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi dei solidi K e W ottenuti dalle rotazioni di R, attorno alle rette y = 0 e y = −1, rispettivamente.

Il volume di K si ottiene mediante il calcolo del seguente integrale:

$$V(K) = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(sen(\pi x)\right)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (8x^3)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (sen^2(\pi x) - 64\ x^6)\ dx$$

Per calcolare il volume di W osserviamo il seguente grafico:



Operando una traslazione dell'asse x nella retta y=-1 le due funzioni (utili per il calcolo del volume) assumono equazioni:

$f(x) = 8x^3 + 1 \quad , \quad g(x) = sen(\pi x) + 1$. Risulta quindi:

$$V(W) = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (sen(\pi x) + 1)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (8x^3 + 1)^2 dx$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria