Liceo della comunicazione 2012 – QUESITI

QUESITO 1

Cosa rappresenta il seguente limite e qual è il suo valore?

$$\lim_{h\to 0}\frac{tan\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}$$

Il limite indicato rappresenta la derivata della funzione $f(x)=\tan(x)$ nel punto $x=\frac{\pi}{6}$.
Il suo valore è quindi dato dal valore di $f'(x)=1+\tan^2(x)=1/\cos^2(x)$ in $x=\frac{\pi}{6}$, che è pari a $1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

Calcoliamo il limite direttamente, ricordando la seguente formula di prostaferesi per la tangente: $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{sen\,(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{tan\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{sen\left(\frac{\pi}{6}+h-\frac{\pi}{6}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right)cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{4}{3}.$$

QUESITO 2

Si calcoli la derivata diciassettesima di $f(x)=cosx$.

Osservando che $f'(x)=-sen\,x$, $f''(x)=-\cos x$, $f'''(x)=sen\,x$, $f^{(IV)}(x)=cosx$
Avremo che la derivata sedicesima è ancora f(x), quindi la derivata diciassettesima è come la derivata prima, cioè $-sen\,x$.

QUESITO 3

Si lancino due dadi. Qual è la probabilità che uno e soltanto uno dei due numeri sia 5?

I casi possibili nel lancio di due dadi sono 6x6=36; i casi favorevoli (cioè 5 su uno solo dei due dadi) sono 5+5=10 (5 sul primo dado e 1,2,3,4,6 su secondo o viceversa).
La probabilità richiesta è quindi: $p=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}\cong 0.278=27.8\,\%$.

QUESITO 4

Si scriva l'equazione della retta normale al grafico di $y = sen^2 x$ *nel punto di ascissa* $\frac{\pi}{4}$.

Calcoliamo la derivata prima della funzione $f(x) = sen^2 x$:

$f'(x) = 2sen\,x\cos x$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$: coefficiente angolare della tangente; il coefficiente angolare della normale è quindi -1 . La normale ha quindi equazione:

$$y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \;,\; y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \;,\; y = -x + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,.$$

QUESITO 5

Si mostri che, nello sviluppo di $(a+b)^n$, *il coefficiente del termine* $a^k b^{n-k}$ *è uguale a* $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Osserviamo che $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$.

Per ottenere il termine $a^k b^{n-k}$ nel precedente prodotto bisogna scegliere tra gli n fattori $(a+b)$ k volte la a ed n-k volte la b: il numero dei termini del tipo $a^k b^{n-k}$ è quindi uguale al numero delle combinazioni di n oggetti, i fattori $(a+b)$, a k a k; il numero di tagli scelte equivale appunto al numero delle combinazioni di n oggetti a k a k. Il coefficiente di $a^k b^{n-k}$ è quindi:

$$C_n, k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

QUESITO 6

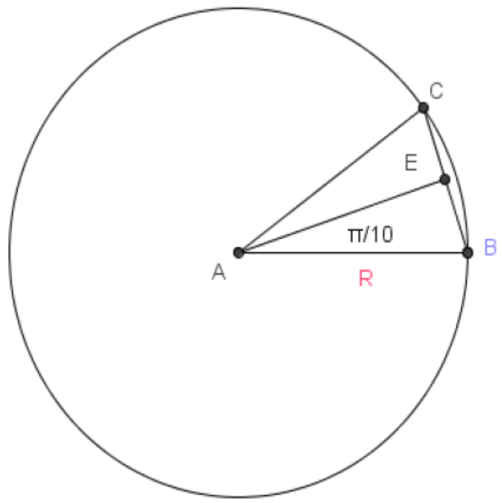
E' noto che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio. Si utilizzi il risultato per calcolare $sen\frac{\pi}{10}$.

Detto R il raggio della circonferenza, il lato del decagono regolare inscritto, sezione aurea di R è dato da:

$$\overline{BC} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

Poiché l'angolo BAC misura $\frac{2\pi}{10}$, detto AE il segmento perpendicolare a BC, si ha che l'angolo BAE è la metà dell'angolo BAC. Pertanto:

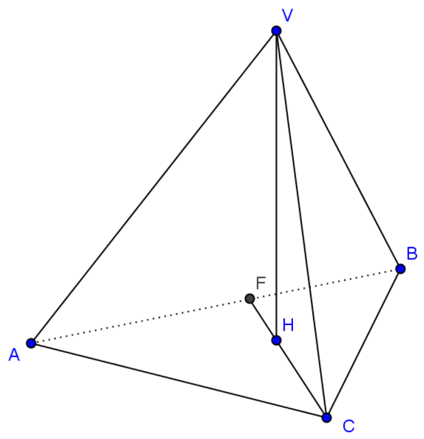
$\overline{BE} = \frac{\overline{BC}}{2} = R\frac{\sqrt{5}-1}{4} = R \cdot sen(\frac{\pi}{10})$, da cui, semplificando per R, si ottiene la relazione richiesta.



Risulta quindi: $sen\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

QUESITO 7

E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h.



Posto VC=l, esprimiamo CH in funzione di l.
Intanto notiamo che H è il baricentro del triangolo equilatero ABC, quindi CH=2HF.
L'altezza CF del triangolo equilatero è data da:

$\frac{l}{2}\sqrt{3}$

Quindi: $CH = \frac{2}{3}\ CF = \frac{l}{3}\ \sqrt{3}$.

Detto α l'angolo tra VH e VC, risulta:

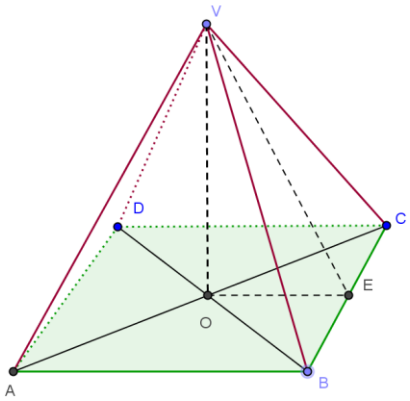
$$sen\alpha = \frac{HC}{VC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

da cui

$$\alpha = arcsen(\frac{\sqrt{3}}{3}) \cong 35°$$

QUESITO 8

Fra le piramidi rette a base quadrata di assegnata superficie laterale S, si determini quella di volume massimo.



La superficie laterale S della piramide è data da:

$S = p \cdot a$ (dove p è il semiperimetro di base ed a l'apotema).

Il volume della piramide è dato da: $V = \frac{1}{3} Area(base) \cdot h$.

Indichiamo con 2x (x>0) il lato del quadrato di base; risulta OE=x, quindi:

$$h = VO = \sqrt{VE^2 - OE^2} = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{S}{p}\right)^2 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{S}{4x}\right)^2 - x^2} = \sqrt{\frac{S^2 - 16x^4}{16x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{S^2 - 16x^4}}{4x}$$

$$V = \frac{1}{3} Area(base) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (2x)^2 \cdot \frac{\sqrt{S^2 - 16x^4}}{4x} = \frac{1}{3} x \cdot \sqrt{S^2 - 16x^4} = \max se\ lo\ è$$

$x \cdot \sqrt{S^2 - 16x^4}$ che a sua volta è massimo (essendo positivo) se lo è: $y = x^2(S^2 - 16x^4)$

Il massimo di questa funzione può essere facilmente trovato utilizzando le derivate ma preferiamo indicare un metodo alternativo (di solito meno usato), ti tipo elementare:

$x^2(S^2 - 16x^4) = \frac{1}{4}(16x^4)^{\frac{1}{2}} \cdot (S^2 - 16x^4) = \max se\ lo\ è\ (16x^4)^{\frac{1}{2}} \cdot (S^2 - 16x^4)$ che è il prodotto di due potenze la cui somma delle basi ($16x^4\ e\ S^2 - 16x^4$) è costante (S^2). tale prodotto è quindi massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, cioè:

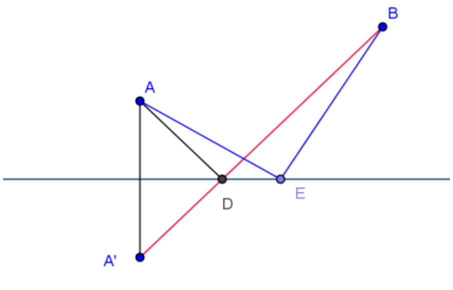
$$\frac{16x^4}{\frac{1}{2}} = \frac{S^2 - 16x^4}{1} \quad , \quad 32x^4 = S^2 - 16x^4 \quad , \quad 48x^4 = S^2 \quad , \quad x = \sqrt[4]{\frac{S^2}{48}}$$

Il volume della piramide è massimo se il lato di base è $l = 2\sqrt[4]{\frac{S^2}{48}} = \sqrt[4]{\frac{S^2}{3}}$ e l'altezza è

$$h = \frac{\sqrt{S^2 - 16x^4}}{4x} = \frac{\sqrt{S^2 - 16 \cdot \frac{S^2}{48}}}{4\sqrt[4]{\frac{S^2}{48}}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}S^2}}{4\sqrt[4]{\frac{S^2}{48}}} = \frac{\sqrt[4]{\frac{4}{9}S^4}}{4\sqrt[4]{\frac{S^2}{48}}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{9}S^4 \cdot \frac{48}{S^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}S^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} l = h$$

QUESITO 9

Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad un retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.



Indicato con A' il simmetrico di A rispetto alla retta r data e congiungendo A' con B, otteniamo il punto D tale che AD+DB risulti minimo. Infatti preso un qualunque altro punto E sulla retta, risulta:
$AE + BE = A'E + BE \geq A'B = A'D + DB = AD + DB$.

QUESITO 10

Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?

[A] $\cos\left(sen(x^2+1)\right)$ *[B]* $\text{sen}\left(cos(x^2+1)\right)$ *[C]* $sen(\ln(x^2+1))$ *[D]* $\cos(\ln(x^2+1))$

L'unica funzione positiva per ogni x reale è la A. Infatti risulta

$-1 \leq sen(x^2+1) \leq 1$

ed il coseno per tali valori è sempre positivo (il coseno è positivo nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ che contiene l'intervallo [-1;1].

La B è errata perché il seno di un numero dell'intervallo [-1;1] non è sempre positivo.

La C è errata perché l'argomento del seno è un numero >0, e quindi il seno non è sempre positivo.

La D è errata per un motivo analogo relativo alla funzione coseno.

Con la collaborazione di Angela Santamaria