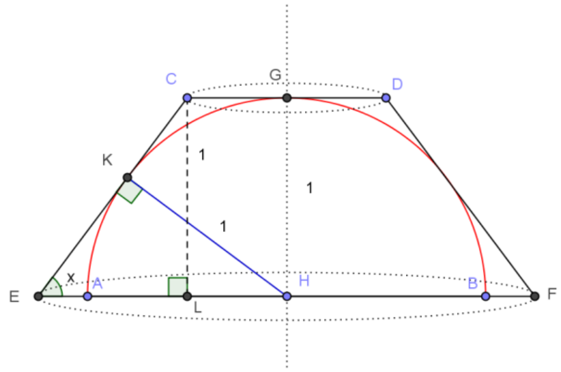
ORDINAMENTO 2012 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.



1)

Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, il volume del solido generato dal trapezio in una rotazione di 180° intorno alla congiungente dei punti medi delle basi, controllando che risulta:

$$V(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\cos^2 x-3cosx+3}{sen^2x}$$

Il solido generato è un tronco di cono con raggi EH e CG e altezza HG=1.
Il volume di tale tronco è quindi:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot(R^2+r^2+Rr)\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot(EH^2+CG^2+EH\cdot CG)\cdot 1$$

$$R=EH=\frac{1}{senx}\qquad EK=\frac{1}{tgx}\qquad EC=\frac{1}{senx}\qquad KC=CG=r=EC-EK=\frac{1}{senx}-\frac{1}{tgx}$$

Quindi:

$$R=\frac{1}{senx}\qquad r=\frac{1}{senx}-\frac{1}{tgx}=\frac{1}{senx}-\frac{cosx}{senx}=\frac{1-cosx}{senx}\qquad h=1$$

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot(R^2+r^2+Rr)\cdot h=V=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{sen^2x}+\left(\frac{1-cosx}{senx}\right)^2+\frac{1}{senx}\cdot\frac{1-cosx}{senx}\right)\cdot 1=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{sen^2x}+\frac{1-2cosx+\cos^2 x}{sen^2x}+\frac{1-cosx}{sen^2x}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{\cos^2 x-3cosx+3}{sen^2x}\right)=V$$

Risulta: $\mathbf{0}<\boldsymbol{x}<\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

2)

Si studi la funzione $f(x) = 3V(x)/\pi$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 < x < 2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{3V(x)}}{\boldsymbol{\pi}} = \frac{\boldsymbol{\cos^2 x - 3cosx + 3}}{\boldsymbol{sen^2 x}}$$

Dominio:

$sen\, x \neq 0 \quad x \neq \pi \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < \pi \;\vee\; \pi < x < 2\pi$

Simmetrie notevoli:

Essendo l'insieme di studio l'intervallo limitato $0 < x < 2\pi$, non si pone il problema di stabilire se la funzione è pari o dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Per $x = 0$ la funzione non esiste, se $y = 0 \quad \cos^2 x - 3cosx + 3 = 0$, che non ammette soluzioni ($\Delta = 9 - 12 < 0$): quindi non ci sono intersezioni con gli assi cartesiani.

Segno della funzione:

$y > 0 \;\; \forall\, x$ del dominio (numeratore e denominatore sono positivi).

Limiti:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^2 x - 3cosx + 3}{sen^2 x} = +\infty$ ($x = 0$ asintoto verticale)

$\lim_{x\to \pi^{\mp}} \frac{\cos^2 x - 3cosx + 3}{sen^2 x} = +\infty$ ($x = \pi$ asintoto verticale)

$\lim_{x\to 2\pi^-} \frac{\cos^2 x - 3cosx + 3}{sen^2 x} = +\infty$ ($x = 2\pi$ asintoto verticale)

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{(-2cosx\; senx + 3senx)sen^2 x - 2senxcosx(\cos^2 x - 3cosx + 3)}{sen^4 x} =$$

$$= \frac{-2\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\, sen^2 x - 6\, cosx - 2cosx\, sen^2 x}{sen^3 x} =$$

$$= \frac{-2\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\,(1 - \cos^2 x) - 6\, cosx - 2cosx\,(1 - \cos^2 x)}{sen^3 x} =$$

$$= \frac{3\cos^2 x - 8\, cosx + 3}{sen^3 x} \geq 0$$

$3\cos^2 x - 8\, cosx + 3 \geq 0$ *se*

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\left(4-\sqrt{7}\right)\right) \leq x \leq 2\,\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\left(4-\sqrt{7}\right)\right)$$

che equivale alla soluzione approssimata: $1.11 \leq x \leq 5.17$

$sen^3 x > 0$ *se* $0 < x < \pi$

che equivale alla soluzione approssimata: $0 < x < 3.14$

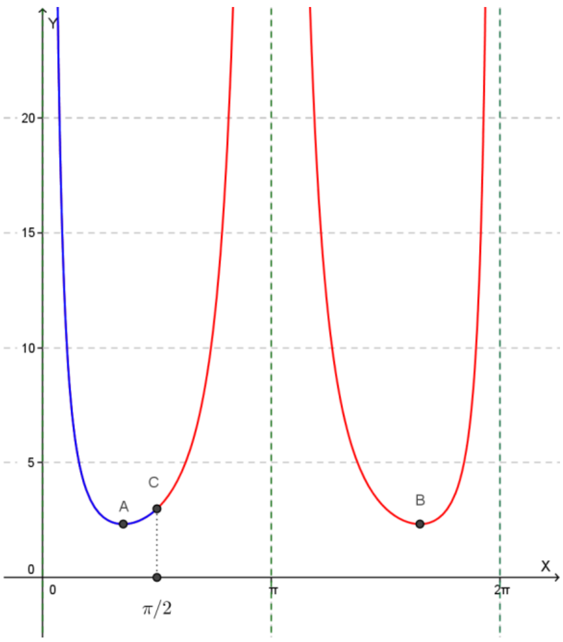
quindi $f'(x) \geq 0$ se $1.11 \leq x < 3.14$ e $5.17 \leq x < 6.28$: in tali intervalli la funzione è crescente; è decrescente in: $0 < x < 1.11$ e $3.14 < x < 5.17$.

La funzione ammette quindi dei minimi relativi in $x = arccos\frac{4-\sqrt{7}}{3} \cong 1.11$ ed in $x = 2\pi - arccos\frac{4-\sqrt{7}}{3} \cong 5.17$

Derivata seconda:

Lo studio della derivata seconda, molto laborioso, non aggiunge significativi dettagli al grafico della funzione

Il grafico della funzione è il seguente (è evidenziato da O a C la parte del grafico che tiene conto delle limitazioni del problema):



3)

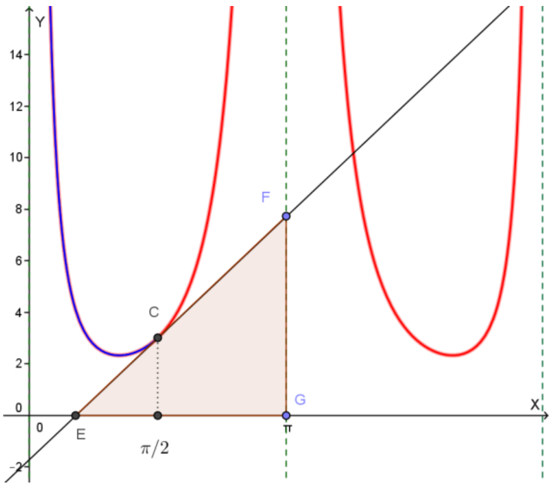
Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x = \pi/2$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con l'asse x e con la retta di equazione $x = \pi$.

La tangente richiesta ha equazione:

$$y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

essendo $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$, la tangente ha equazione:

$$y - 3 = 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad y = 3x + 3 - \frac{3}{2}\pi$$



L'intersezione E della tangente con l'asse x ha coordinate: $E = \left(\frac{\pi}{2} - 1; 0\right)$.

L'intersezione F della tangente con la retta di equazione $x = \pi$ ha coordinate:

$F = \left(\pi; \frac{3}{2}\pi + 3\right)$.

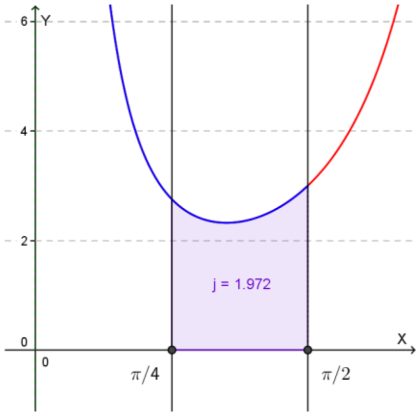
Il triangolo EFG ha area:

$$A(EFG) = \frac{EG \cdot FG}{2} = \frac{\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\pi + 3\right)}{2} u^2 = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\pi + 3\right)}{2} u^2 =$$

$$= \frac{3 \cdot (\pi + 2)^2}{8} u^2 \cong 9.91 \; u^2$$

4)

Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = \pi/4 \quad e \quad x = \pi/2$.



$$Area = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2 x - 3cosx + 3}{sen^2 x} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \text{sen}^2 x - 3cosx + 3}{sen^2 x} \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4}{sen^2 x} - 1 - 3cosx(sen^{-2}x) \right) dx = \left[-4cotgx - x + \frac{3}{senx} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[0 - \frac{\pi}{2} + 3 - \left(-4 - \frac{\pi}{4} + 3\sqrt{2} \right) \right] = \left(7 - 3\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \right) u^2 \cong 1.972\, u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri