ORDINAMENTO 2012 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = x\sqrt{2-x}$$

1)

Si studi la funzione e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

$\boldsymbol{f(x) = x\sqrt{2-x}}$

Dominio:

$2 - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad -\infty < x \leq 2$

Simmetrie notevoli:

Con il dominio trovato la funzione non può essere né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, $y = 0$; se $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$.

Segno della funzione:

$y > 0 \quad se \quad 0 < x < 2$.

Limiti:

$\lim_{x \to -\infty} x\sqrt{2-x} = -\infty$; non c'è asintoto obliquo, poiché la funzione non è un infinito del primo ordine.

Derivata prima:

$f'(x) = \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}} \geq 0$ se $4 - 3x \geq 0$, $x \leq \frac{4}{3}$: la funzione è crescente per $x < \frac{4}{3}$, decrescente per $\frac{4}{3} < x \leq 2$ e ammette un massimo relativo (e assoluto) per $x = \frac{4}{3}$, che vale $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{2 - \frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \cong 1.1$; massimo $M = \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

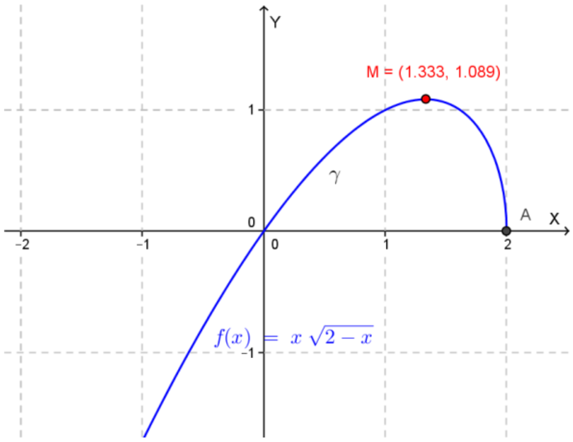
La funzione non è derivabile in x=2 e risulta:

$\lim_{x \to 2^-} \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}} = -\infty$: quindi in x=2 abbiamo una tangente verticale.

Derivata seconda:

$f''(x) = \frac{3x-8}{4(2-x)\sqrt{2-x}} \geq 0 \quad se \quad x \geq \frac{8}{3} \;\; ed\ essendo\ x \leq 2$ la derivata seconda è sempre negativa: il grafico volge sempre la concavità verso il basso; non ci sono flessi.

Il grafico della funzione è il seguente:



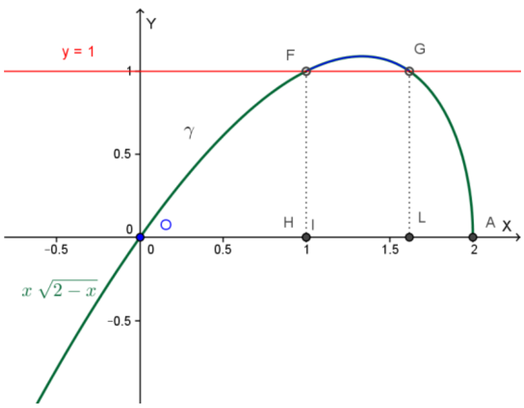
2)

Si risolva la disequazione:

$$x\sqrt{2-x} < 1$$

Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento cartesiano le due funzioni

$$y = x\sqrt{2-x} \qquad e \quad y = 1$$



Detti F e G i punti di intersezione tra le due curve, la disequazione è verificata per:

$x < x_F\,, \quad x_G < x \leq 2$. Troviamo le ascisse di F e G:

$x\sqrt{2-x} = 1$; posta la condizione $0 < x < 2$ abbiamo:

$x^2(2-x) = 1$ che equivale a: $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$; abbassando di grado (mediante la regola di Ruffini) con la radice $x = 1 = x_F$, abbiamo:

$(x-1)(x^2 - x - 1) = 0$; l'equazione $x^2 - x - 1 = 0$ ammette le soluzioni:

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, di cui è accettabile $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = x_G$.

La disequazione è quindi verificata per:

$$x < 1 \,, \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x \leq 2$$

N.B.

Allo stesso risultato si arriva con il metodo algebrico, che equivale a risolvere i sistemi:

$\begin{cases} x \leq 2 \\ x < 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x < 0$ e

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 0 \\ x^2(2-x) < 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 0 \\ x^3 - 2x^2 + 1 > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 0 \\ (x-1)(x^2 - x - 1) > 0 \end{cases}$$ da cui

$0 \leq x < 1 \,, \; \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x \leq 2$

3)

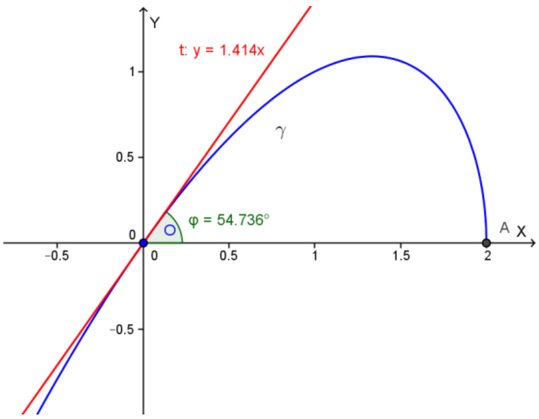
Si scriva l'equazione della tangente alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo φ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x.

Il punto d'intersezione con l'asse y è O=(0;0). La tangente richiesta ha equazione:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

essendo $f(0) = 0 \;\; e \;\; f'(0) = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, la tangente ha equazione:

$$y = \sqrt{2}\,x$$

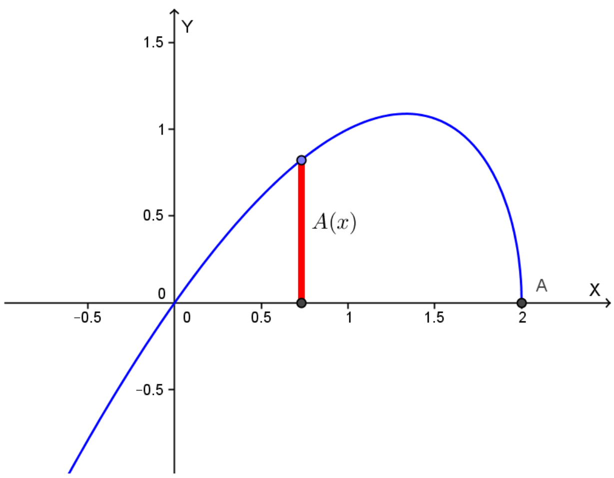


Cerchiamo l'angolo φ che la tangente forma con il semiasse positivo delle x.

$tg\,\varphi = f'(0) = \sqrt{2}$ quindi $\varphi = arctg(2) = 54.736° \cong 54°44'$

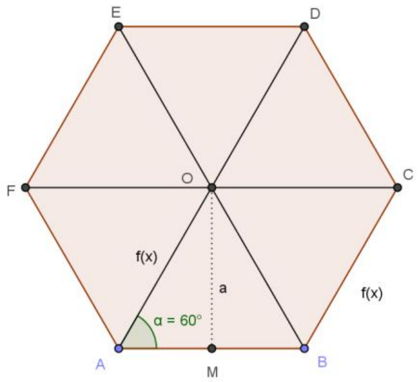
4)

La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse x nel I quadrante è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.



Il volume del solido S si ottiene calcolando il seguente integrale:

$V(S) = \int_0^2 A(x)dx$, dove A(x) è l'area dell'esagono regolare di lato f(x).



$$A(x) = p \cdot a = 3f(x) \cdot \left[f(x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}\left(f(x)\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x\sqrt{2-x}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 \cdot (2-x)$$

$$\boldsymbol{A(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (2x^2 - x^3)}$$

$$V(S) = \int_0^2 A(x)dx = \frac{3\sqrt{3}}{2}\int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left[\frac{16}{3} - 4 - (0)\right]$$

$$V(S) = 2\sqrt{3}\, u^3 \cong 3.464\, u^3$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri