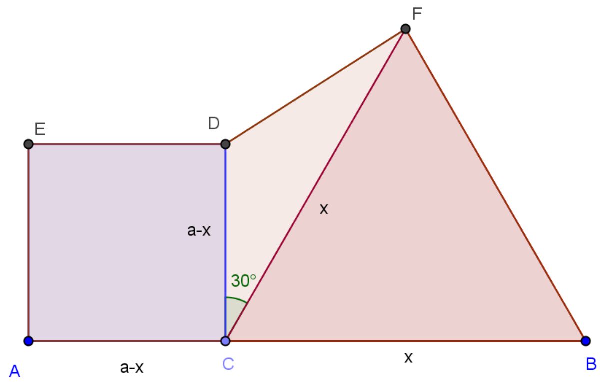
ORDINAMENTO 2012 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Si divida il segmento $AB = a$ in due parti AC e CB, in modo che, costruito su AC il quadrato ACDE e su CB il triangolo equilatero CBF, sia minima l'area del pentagono ABFDE.



Posto BC=x (con $0 \leq x \leq a$) risulta AC=a-x; quindi:

$$Area(ABFDE) = Area(ACDE) + Area(CBF) + Area(FCD) =$$

$$= (a-x)^2 + x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}(x(a-x)sen30°) = a^2 - 2ax + x^2 + x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}ax - \frac{1}{4}x^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\right)x^2 - \frac{7}{4}ax + a^2 = y$$

$y = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\right)x^2 - \frac{7}{4}ax + a^2$

rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, quindi il minimo di y si ha nel vertice, cioè per:

$$x = x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{7}{4}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{3}-2} = \frac{7a}{2(\sqrt{3}+3)} = \frac{7a(3-\sqrt{3})}{12} \cong 0.74\, a.$$

Il pentagono ABFDE ha quindi area minima quando il lato del triangolo ha lato $\frac{7a(3-\sqrt{3})}{12}$.

QUESITO 2

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} senx \cdot \ln(sen2x)\,, & per \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \quad , & per\ x = 0 \end{cases}$$

si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto x = 0.

Affinché la funzione sia continua in x=0 deve essere:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

$\lim_{x\to 0^+} senx \cdot \ln(sen2x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{sen2x \cdot \ln(sen2x)}{2cosx} = 0$ poiché $cosx \to 1$ e

$sen2x \cdot \ln(sen2x) \to 0$ (poiché $sen2x \to 0$ e $f(x)lnf(x) \to 0$ se $f(x) \to 0^+$).

Quindi la funzione è continua (da destra) in x=0. Dimostriamo che non è derivabile, dimostrando che non esiste o non è finito il limite:

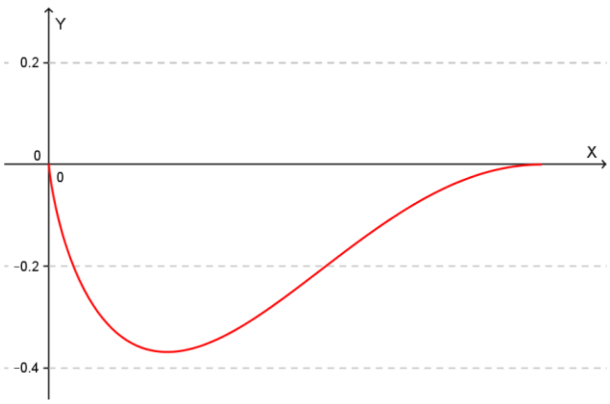
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

Risulta:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{sen2h \cdot ln(sen2h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{sen2h}{h}\right) \cdot ln(sen2h) =$$

$= 2 \cdot \lim_{h\to 0^+} \ln(sen2h) = -\infty$: quindi la funzione non è derivabile in x=0.

Il grafico della funzione è il seguente:



QUESITO 3

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x+2)^{\ln(e+2x)}$$

nel punto P(0,2).

La tangente in P ha equazione: $y - 2 = f'(0)(x - 0)$.

Riscriviamo la funzione nella seguente forma:

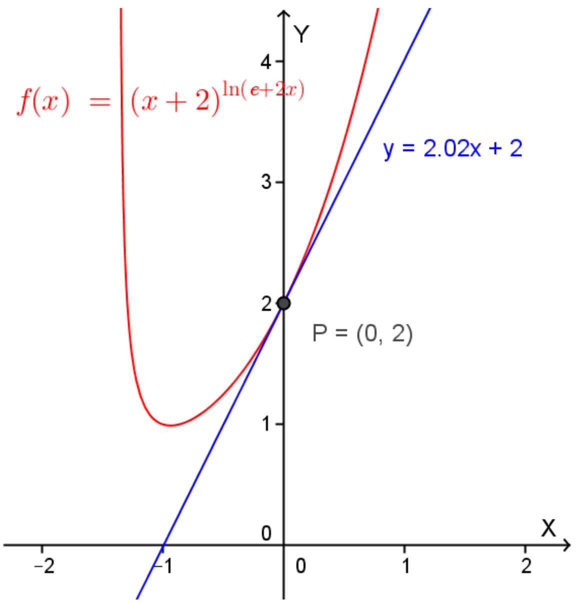
$f(x) = e^{ln[(x+2)^{\ln(e+2x)}]} = e^{\ln(e+2x)\cdot\ln(x+2)}$ (N.B. la funzione è definita per $x > -\frac{e}{2}$).

$$f'(x) = e^{\ln(e+2x)\cdot\ln(x+2)} \cdot \left[\frac{2}{e+ex} \cdot \ln(x+2) + \frac{\ln(e+2x)}{x+2}\right]$$

$f'(0) = 2 \cdot \left[\frac{2}{e} \cdot \ln(2) + \frac{1}{2}\right] = \frac{4}{e} \cdot \ln(2) + 1$ quindi la tangente in P ha equazione:

$y - 2 = \left[\frac{4}{e} \cdot \ln(2) + 1\right] \cdot x \implies y = \left[\frac{4}{e} \cdot \ln(2) + 1\right] \cdot x + 2 \cong 2.02\, x + 2$

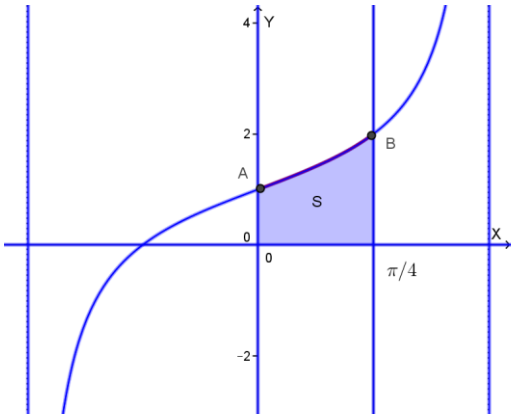
Questa la situazione grafica:



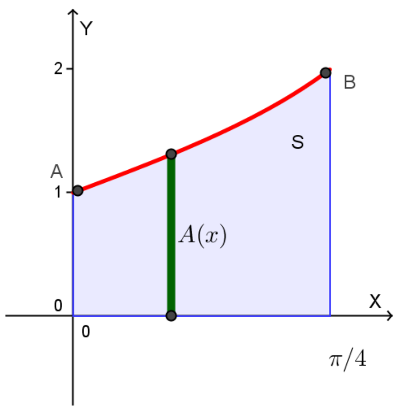
QUESITO 4

La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + tgx$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

La superficie S è rappresentata nella seguente figura:



Rappresentiamo più in dettaglio la superficie S:



Il volume del solido Σ è dato da:

$$V = \int_0^{\pi/4} A(x)\,dx$$

Essendo A(x) l'area del triangolo equilatero di lato f(x), quindi: $A(x) = \left(f(x)\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$A(x) = (1 + tgx)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = (1 + 2tgx + tg^2x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$V = \int_0^{\pi/4} A(x)dx = \int_0^{\pi/4} (1 + 2tgx + tg^2x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\pi/4} (1 + 2tgx + tg^2x)dx =$$

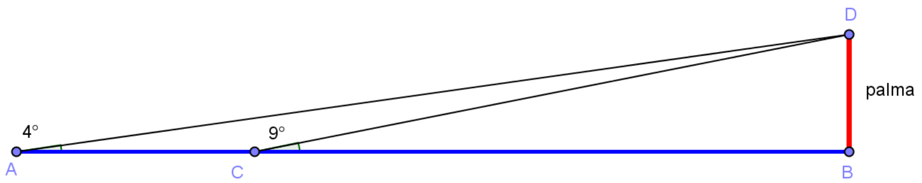
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(1+tg^2x)+2tgx]dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2tgx)dx\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{senx}{cosx}\right)dx\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}[tgx-2\ln(cosx)]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-2ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}[1+\ln(2)]\ u^3\cong 0.733\ u^3=V$$

QUESITO 5

Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4°; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura 9°. Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?



Al primo avvistamento della palma: $B\hat{A}D=4°$; da A a C trascorrono 20 minuti; $B\hat{C}D=9°$.
Dobbiamo calcolare il tempo in minuti che impiega il capo tuareg per raggiungere l'albero

Indichiamo con t il tempo in minuti impiegato per passare da C a B.

$BD=AB\cdot tg4°=BC\cdot tg9°$; ma, essendo la velocità costante: $\frac{CB}{t}=\frac{AC}{20}\ \Rightarrow CB=\frac{t\cdot AC}{20}$
Ma $AB=AC+CB=AC+\frac{t\cdot AC}{20}=AC\left(1+\frac{t}{20}\right)$; quindi, da $AB\cdot tg4°=BC\cdot tg9°$:

$$AC\left(1+\frac{t}{20}\right)\cdot tg4°=\frac{t\cdot AC}{20}\cdot tg9°\quad\Rightarrow\quad(20+t)\cdot tg4°=t\cdot\ tg9°\ \Rightarrow$$

$$t(tg9°-tg4°)=20\cdot tg4°\quad\Rightarrow\quad t=\frac{20\ tg4°}{tg9°-tg4°}\cong 15.81\ minuti\ \cong 15'49''$$

QUESITO 6

Si determinino le equazioni degli asintoti della curva: $f\,(x)=\sqrt{x^2+2x-3}-x$

Cerchiamo il dominio della funzione.

$$x^2+2x-3\geq 0\quad\Rightarrow\quad -\infty<x\leq -3,\quad 1\leq x<+\infty$$

La funzione può quindi ammettere asintoti orizzontali e/o obliqui.

Risulta:

$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right) = +\infty$: quindi per $x \to -\infty$ possiamo avere un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x-x}{x}\right) = -2 = m$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)+2x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x-3}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-3-x^2}{-x-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-2x} =$$

$$= -1 = q$$

Quindi per $x \to -\infty$ abbiamo l'asintoto obliquo di equazione: $y = -2x - 1.$

Vediamo se c'è asintoto per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right) = [F.I. \quad +\infty-\infty]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x-3}+x} =$$

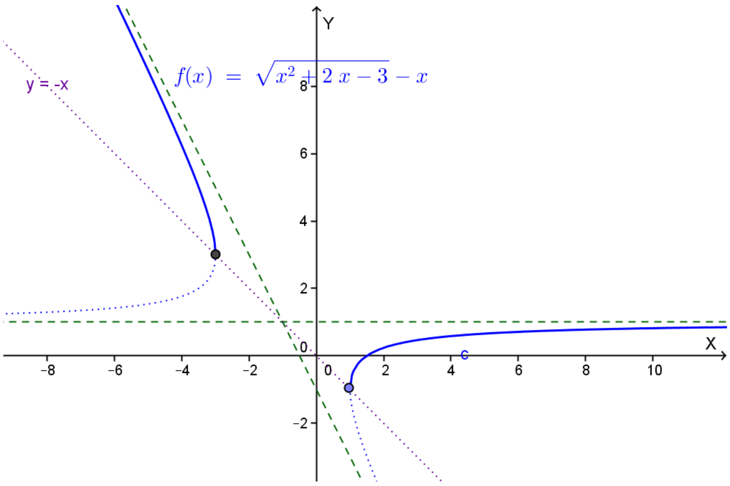
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3-x^2}{+x+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x} = 1$$

Quindi $x \to +\infty$ abbiamo l'asintoto orizzontale: $y = 1.$

N.B. La funzione di equazione $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}-x$ equivale a $y = \sqrt{x^2+2x-3}-x$ che si può trasformare in:

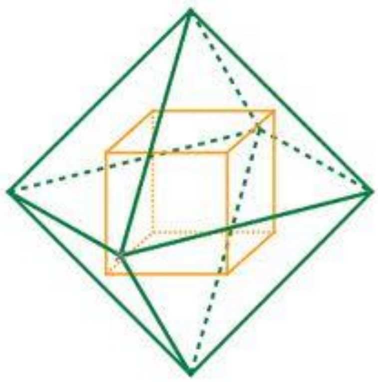
$$\begin{cases} y+x \geq 0 \\ (y+x)^2 = x^2+2x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x \\ y^2+2xy-2x+3=0 \end{cases}$$

che è una parte di iperbole:



QUESITO 7

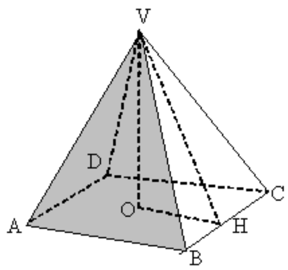
Un ottaedro regolare di alluminio (densità $\rho = 2{,}7\ g/cm^3$), avente lo spigolo $l = 5\ cm$, presenta all'interno una cavità di forma cubica. Sapendo che la massa dell'ottaedro è $m = 155\ g$, si calcoli la lunghezza dello spigolo della cavità.



Ricordiamo che il volume dell'ottaedro regolare è:

$$V(ottaedro\ regolare) = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

Questa formula si ottiene raddoppiando il volume della piramide regolare retta a base quadrata con spigoli tutti uguali ad l; infatti:



$V(tetraedro) = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot VO$

Ma $VO = \sqrt{VH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(l\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}l^2} = l\frac{\sqrt{2}}{2}$ quindi:

$V(tetraedro) = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot l\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6}l^3\sqrt{2}$ pertanto:

$$\boldsymbol{V(ottaedro\ regolare) = 2 \cdot \frac{1}{6}l^3\sqrt{2} = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3}}$$

$V(ottaedro\ pieno) = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{5^3 \cdot \sqrt{2}}{3}\ cm^3 \cong 58{,}926\ cm^3$

Siccome $\rho = \frac{m}{V}$ $\quad V = \frac{m}{\rho}$. Quindi:

$V(ottaedro\ vuoto) = \frac{m}{\rho} = \frac{155\ g}{2{,}7\ g/cm^3} = 57{,}407\ \ cm^3$

$V(cavità\ cubica) = V(ottaedro\ pieno) - V(ottaedro\ vuoto) = 58.926\ cm^3 - 57{,}407\ \ cm^3 =$

$= 1{,}518\ cm^3$

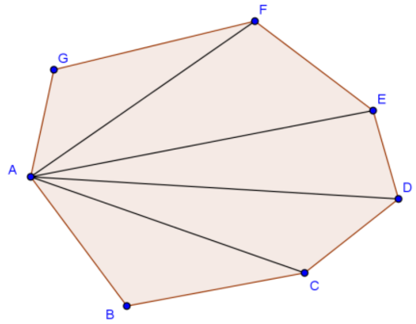
Quindi lo spigolo della cavità è:

$spigolo\ cavità = \sqrt[3]{1.518}\ cm \cong 1{,}149\ cm$

QUESITO 8

Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati?

Le diagonali uscenti da un vertice sono $n - 3$ (cioè tante quanti sono i vertici meno il vertice stesso e i due adiacenti).



Il numero delle diagonali uscenti da n vertici sono quindi $n \cdot (n-3)$. Ma ogni diagonale contiene due vertici, quindi il numero delle diagonali è:

$$numero\ diagonali = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Questo numero può essere determinato anche come numero dei segmenti ottenuti con le combinazioni semplici di n oggetti (gli n vertici) a due a due, diminuito del numero dei segment1 che si ottengono congiungendo due vertici consecutivi, che sono pari al numero dei lati (n). Quindi:

$$numero\ diagonali = C_{n,2} - n = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2!} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

QUESITO 9

Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

nell'intervallo $a \leq x \leq b$, con $0 < a < b$ *, e si dimostri che esso è uguale alla media geometrica tra i due valori che la funzione assume nei due estremi dell'intervallo.*

Il valor medio richiesto è dato da:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_a^b \frac{1}{x^2}dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{b-a}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\left[-\frac{1}{b}-\left(-\frac{1}{a}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right] = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{ab}$$

I valori assunti agli estremi dell'intervallo sono: $f(a) = \frac{1}{a^2}$ e $f(b) = \frac{1}{b^2}$. La loro media geometrica è:

$$\sqrt{f(a)f(b)} = \sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}} = \frac{1}{ab} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

QUESITO 10

Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$$

si verifichi che esiste un solo punto ξ interno all'intervallo chiuso [-1,0], tale che la tangente al diagramma in questo punto è parallela alla corda congiungente i due punti estremi del diagramma.

Si tratta di verificare che la funzione soddisfa il teorema di Lagrange nell'intervallo [-1,0], cioè che la funzione è continua nell'intervallo chiuso [-1,0] e derivabile nell'intervallo aperto (-1,0); in tal caso esiste almeno un punto ξ interno all'intervallo dato tale che:

$$\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = \frac{4-1}{1} = 3 = f'(\xi) \qquad (*)$$

La funzione è continua per ogni x diverso da 1, quindi lo è nell'intervallo [-1,0].
Risulta:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x-4)(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+5}{(x-1)^2}$$

Che esiste per ogni x diverso da 1, quindi la funzione è derivabile in (-1,0).

Per il Teorema di Lagrange esiste quindi almeno un punto dell'intervallo aperto (-1,0) in cui vale la $(*)$.

$f'(x) = \frac{x^2-2x+5}{(x-1)^2} = 3$ se:

$x^2 - 2x + 5 = 3(x-1)^2 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 - 4x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$ di cui è accettabile la sola soluzione $x = 1 - \sqrt{2} = \xi$