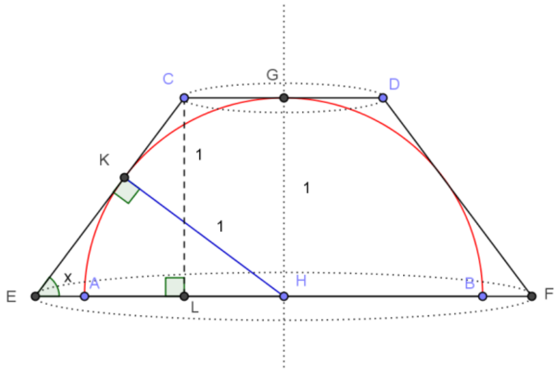
PNI 2012 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.



1)

Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, l'area della superficie del trapezio, controllando che risulta:

$$S(x) = \frac{2 - cosx}{senx}$$

Risulta:

$$S(x) = \frac{(EF + CD) \cdot GH}{2}$$

Osservando la figura si ha:

$EH = \frac{1}{senx}$ $\quad EL = 1 \cdot cotgx = \frac{cosx}{senx}$ $\quad HL = EH - EL = \frac{1}{senx} - \frac{cosx}{senx} = \frac{1-cosx}{senx}$

Quindi:

$EF = 2EH = \frac{2}{senx}$ $\quad CD = 2HL = \frac{2(1-cosx)}{senx}$

$$S(x) = \frac{\left(\frac{2}{senx} + \frac{2(1-cosx)}{senx}\right) \cdot 1}{2} = \frac{1 + 1 - cosx}{senx} = \frac{2 - cosx}{senx} = S(x)$$

Notiamo che risulta: $\mathbf{0 < x < \frac{\pi}{2}}$

2)

Si studi la funzione $S(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 < x < 2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

$S(x) = \frac{2-cosx}{senx} = f(x)$, $\quad 0 < x < 2\pi$, $\quad$ *(limitazioni del problema $0 < x < \frac{\pi}{2}$)*

Dominio:

$sen\, x \neq 0 \quad x \neq \pi \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < \pi \quad \vee \quad \pi < x < 2\pi$

Simmetrie notevoli:

Essendo l'insieme di studio l'intervallo limitato $0 < x < 2\pi$, non si pone il problema di stabilire se la funzione è pari o dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Per $x = 0$ la funzione non esiste, se $y = 0 \quad cosx = 2$, che non ammette soluzioni: quindi non ci sono intersezioni con gli assi cartesiani.

Segno della funzione:

$$\frac{2 - cosx}{senx} > 0$$

$2 - cosx > 0 \quad se \quad cosx < 2: sempre$

Quindi la funzione è positiva quando $senx > 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < \pi$

Limiti:

$\lim_{x \to 0^+} \frac{2-cosx}{senx} = +\infty \quad$ ($x = 0$ asintoto verticale)

$\lim_{x \to \pi^\mp} \frac{2-cosx}{senx} = \pm\infty \quad$ ($x = \pi$ asintoto verticale)

$\lim_{x \to 2\pi^-} \frac{2-cosx}{senx} = -\infty \quad$ ($x = 2\pi$ asintoto verticale)

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{sen^2x - (2 - cosx)(cosx)}{sen^2x} = \frac{1 - 2cosx}{sen^2x} \geq 0 \quad se \quad 1 - 2cosx \geq 0, \quad cosx \leq \frac{1}{2} \;\; :$$

$\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5}{3}\pi$ *(con le limitazioni del dominio).*

La funzione quindi decresce per $0 < x < \frac{\pi}{3}$ $\quad e\ per\ \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$ e cresce se

$\frac{\pi}{3} < x < \pi \quad e\ per \quad \pi < x < \frac{5}{3}\pi$. Abbiamo un minimo relativo per $x = \frac{\pi}{3}$, di ordinata

$$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

ed un massimo relativo per $x = \frac{5}{3}\pi$, di ordinata

$$y = f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{2-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

Derivata seconda:

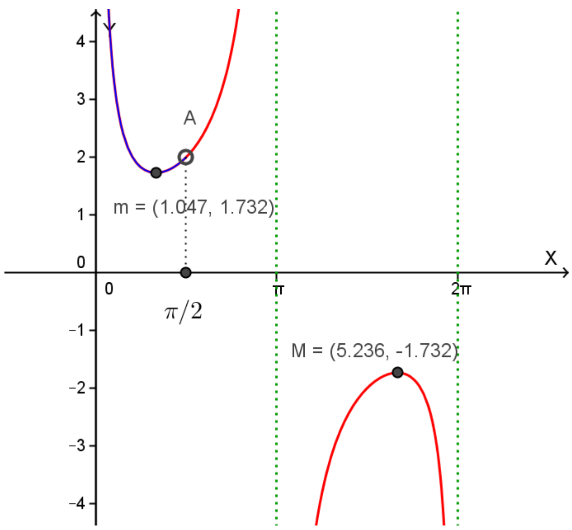
$$f''(x) = \frac{2senx(sen^2x) - (1-2cosx)(2senxcosx)}{sen^4x} = \frac{2sen^3x - 2senxcosx + 4senxcos^2x}{sen^4x}$$

$f''(x) \ge 0 \quad se \quad 2senx(sen^2x - cosx + 2\cos^2 x) \ge 0$, $\quad senx(\cos^2 x - cosx + 1) \ge 0$

che equivale a $senx \ge 0$ perché $\cos^2 x - cosx + 1 > 0 \quad \forall x$. Quindi:

$f''(x) \ge 0 \quad se \quad senx \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < \pi$: in tale intervallo il grafico volge la concavità verso l'alto, nel resto del dominio verso il basso; non ci sono flessi.

Il grafico della funzione è il seguente (è evidenziato da O ad A la parte del grafico che tiene conto delle limitazioni del problema):



3)

Si scelga a caso un punto all'interno del trapezio e si determini la probabilità p(x) che tale punto risulti interno al semicerchio inscritto. Si studi la funzione p(x) e si tracci il suo grafico ω nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

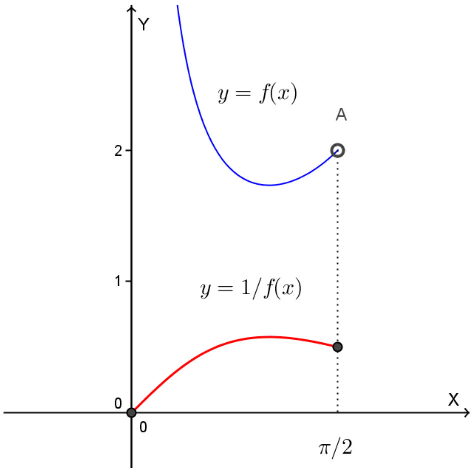
Risulta:

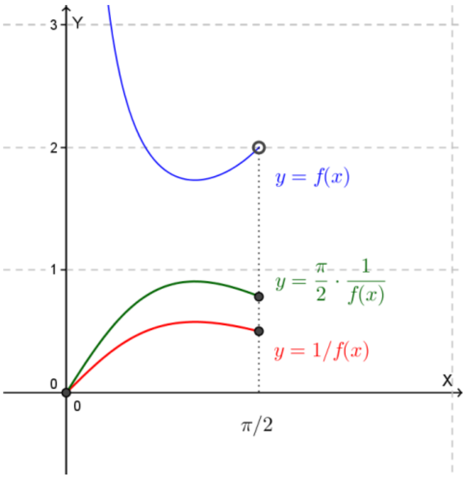
$$p(x) = \frac{Area(semicerchio)}{Area(trapezio)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{S(x)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2-cosx}{senx}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{senx}{2-cosx} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{f(x)}$$

La funzione

$$y = p(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{f(x)} \quad con \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

si può facilmente ottenere deducendo prima da $y = f(x)$ la funzione $y = \frac{1}{f(x)}$ e poi da questa la funzione $y = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{f(x)}$.





4)

Si calcoli il valore medio della funzione p(x) nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Il valor medio richiesto è dato da:

$$\frac{\int_a^b p(x)dx}{b-a} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{senx}{2-cosx}\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{senx}{2-cosx}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{senx}{2-cosx}\, dx =$$

$$= [ln|2-cosx|]_0^{\frac{\pi}{2}} = ln2 - 0 = ln2 \cong 0.69$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri