PNI 2012 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = arctgx - \frac{x}{1+x^2}$$

1)

Si studi la funzione e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

$$\boldsymbol{f(x) = arctgx - \frac{x}{1+x^2}}$$

Dominio: $-\infty < x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

$f(-x) = -arctg(x) + \frac{x}{1+x^2} = -f(x)$: la funzione è dispari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, $y = 0$; se $y = 0$, $arctgx - \frac{x}{1+x^2} = 0$: non è il caso di risolvere per ora graficamente questa equazione, procediamo nello studio.

Segno della funzione:

$y > 0 \;\; se \;\; arctgx - \frac{x}{1+x^2} > 0$: anche in questo caso conviene attendere.

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty}\left(arctgx - \frac{x}{1+x^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$: asintoto orizzontale $y = -\frac{\pi}{2}$ per $x \to -\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(arctgx - \frac{x}{1+x^2}\right) = +\frac{\pi}{2}$: asintoto orizzontale $y = +\frac{\pi}{2}$ per $x \to +\infty$.

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} \geq 0\,, \quad \frac{1+x^2-1-x^2+2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0\,, \quad \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x$, ed in particolare $f'(x) = 0$ se $x = 0$, dove c'è un asintoto orizzontale; la funzione è sempre crescente, non ci sono massimi né minimi.

Derivata seconda:

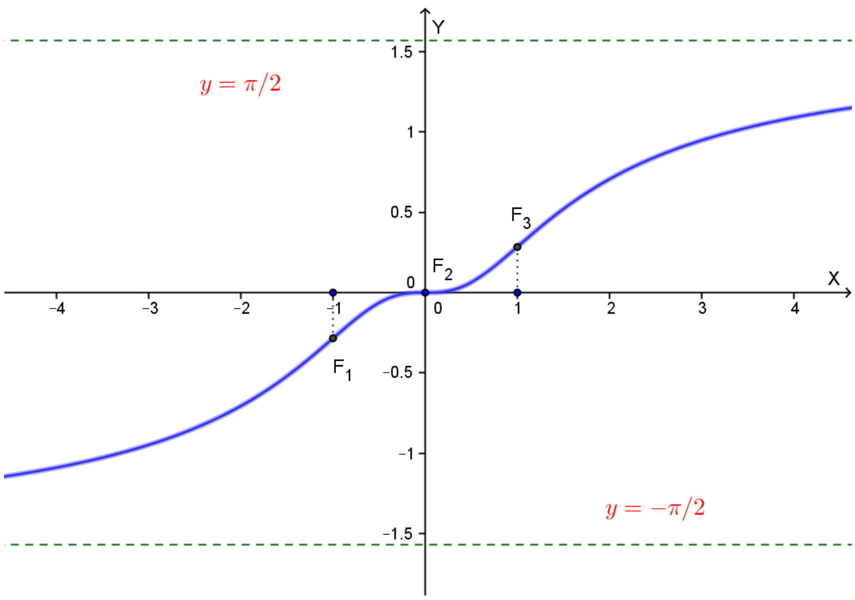
$$f''(x) = \frac{4x(1+x^2)^2 - 2x^2 \cdot [2(1+x^2)2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{-4x^3+4x}{(1+x^2)^3} \geq 0 \quad se \quad -4x^3+4x \geq 0$$

$x^3 - x \leq 0\,,\ x(x^2-1) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 1 \quad \vee \quad 0 \leq x \leq 1$; quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se $x \leq 1 \quad \vee \quad 0 \leq x \leq 1$ e verso il basso nella parte rimanente del dominio; abbiamo tre punti di flesso: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$; risulta;

$$f(-1) = arctg(-1) + \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cong -0.285$$
$$f(0) = 0$$
$$f(1) = arctg(1) + \frac{1}{2} = +\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cong +0.285$$

$$F_1 = \left(-1; -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right), \qquad F_2 = (0;0), \qquad F_3 = \left(1; \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

Il grafico della funzione è il seguente:



2)

Si verifichi che i tre punti di flesso di γ sono allineati e si scriva l'equazione della retta alla quale essi appartengono.

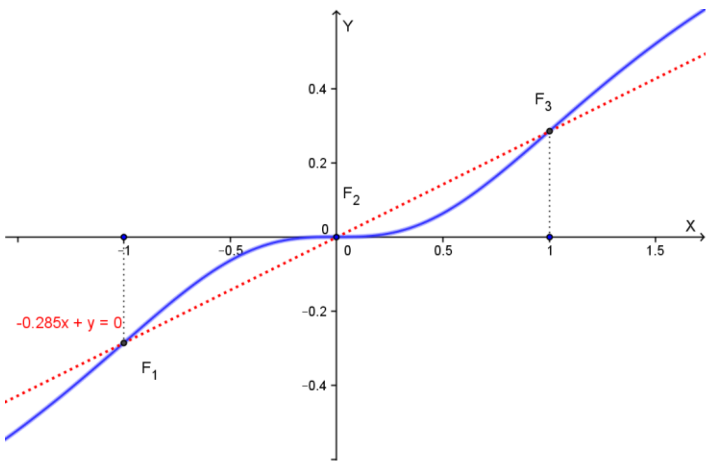
$$F_1=\left(-1;-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right),\qquad F_2=(0;0),\qquad F_3=\left(1;\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

F_1 ed F_3 sono simmetrici rispetto all'origine O, che è il flesso F_2: quindi i tre punti sono allineati.

La retta che li contiene passa per O ed F_3, quindi ha coefficiente angolare

$$m=\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}{1}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cong 0.285$$

Quindi la retta che contiene i tre flessi ha equazione: $y=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)x$



3)

Si scrivano le equazioni delle tangenti inflessionali, si dimostri che due di esse sono parallele e si calcoli la loro distanza.

$f'(0)=0$: la tangente in $F_2=(0;0)$ è $y=0$

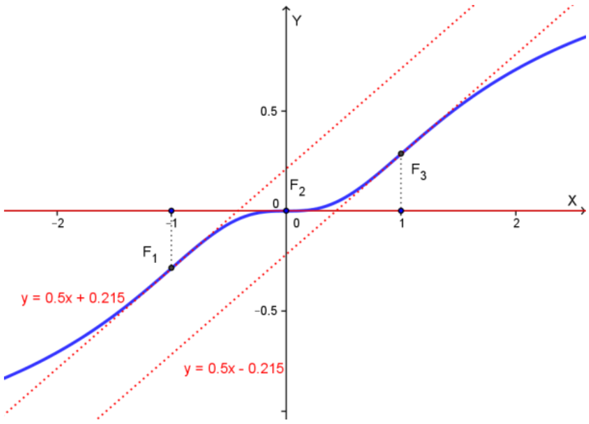
$f'(-1)=\frac{1}{2}$: la tangente in $F_1=\left(-1;-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$ è $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$ *da cui:*

$$y+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+1)\quad\Longrightarrow\quad y=\frac{1}{2}x+1-\frac{\pi}{4}$$

$f'(1)=\frac{1}{2}$: la tangente in $F_3=\left(1;\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$ è $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ *da cui:*

$$y - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{\pi}{4}$$

Quindi le due tangenti inflessionali parallele sono quelle in $F_1 \quad ed \quad F_3 \quad (m = \frac{1}{2})$



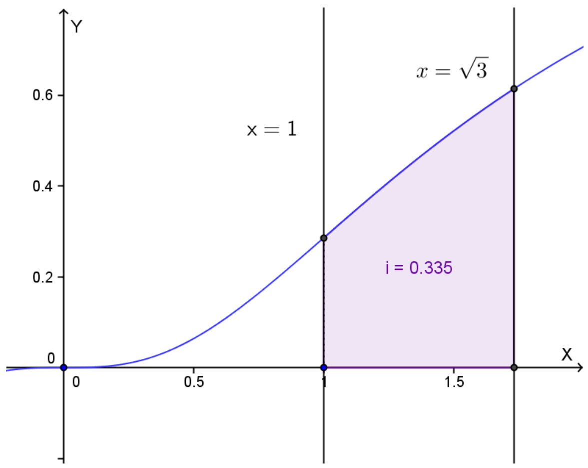
La distanza tra le due tangenti parallele si può calcolare come distanza del punto $F_1 = \left(-1; -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$ dalla tangente in F_3 (che possiamo scrivere nella forma:

$x - 2y - 2 + \frac{\pi}{2} = 0$).

$$d = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\frac{-1 + \frac{\pi}{2} - 1 - 2 + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{5}}\right| = \frac{4-\pi}{\sqrt{5}} \cong 0.384$$

4)

Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = 1$ e $x = \sqrt{3}$.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left(arctgx - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

Risulta:

$\int arctgx\, dx = \int (x)' \cdot (arctgx) dx = x \cdot arctgx - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$ quindi:

$$\int \left(arctgx - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = x \cdot arctgx - \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \cdot arctgx - \ln(1+x^2) + k$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left(arctgx - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = [x \cdot arctgx - \ln(1+x^2)]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot arctg(\sqrt{3}) - \ln(4) - arctg(1) + \ln(2) =$$

$$= \left(\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - \ln(2) - \frac{\pi}{4}\right) u^2 \cong 0.335\, u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri