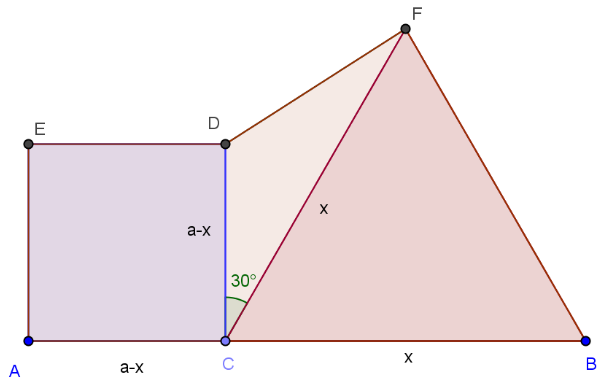
PNI 2012 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Si divida il segmento $AB = a$ in due parti AC e CB, in modo che, costruito su AC il quadrato ACDE e su CB il triangolo equilatero CBF, sia minima l'area del pentagono ABFDE.



Posto BC=x (con $0 \le x \le a$) risulta AC=a-x; quindi:

$$Area(ABFDE) = Area(ACDE) + Area(CBF) + Area(FCD) =$$

$$= (a-x)^2 + x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}(x(a-x)sen30°) = a^2 - 2ax + x^2 + x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}ax - \frac{1}{4}x^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\right)x^2 - \frac{7}{4}ax + a^2 = y$$

$y = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\right)x^2 - \frac{7}{4}ax + a^2$

rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, quindi il minimo di y si ha nel vertice, cioè per:

$$x = x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{7}{4}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{3}-2} = \frac{7a}{2(\sqrt{3}+3)} = \frac{7a(3-\sqrt{3})}{12} \cong 0.74\, a.$$

Il pentagono ABFDE ha quindi area minima quando il lato del triangolo ha lato $\frac{7a(3-\sqrt{3})}{12}$.

QUESITO 2

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} senx \cdot \ln(sen2x)\,, & per \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 \quad , & per\ x = 0 \end{cases}$$

si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto x = 0.

Affinché la funzione sia continua in x=0 deve essere:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

$\lim_{x \to 0^+} senx \cdot \ln(sen2x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{sen2x \cdot \ln(sen2x)}{2cosx} = 0$ poiché $cosx \to 1$ e

$sen2x \cdot \ln(sen2x) \to 0$ (poiché $sen2x \to 0$ e $f(x)lnf(x) \to 0$ se $f(x) \to 0^+$).

Quindi la funzione è continua (da destra) in x=0. Dimostriamo che non è derivabile, dimostrando che non esiste o non è finito il limite:

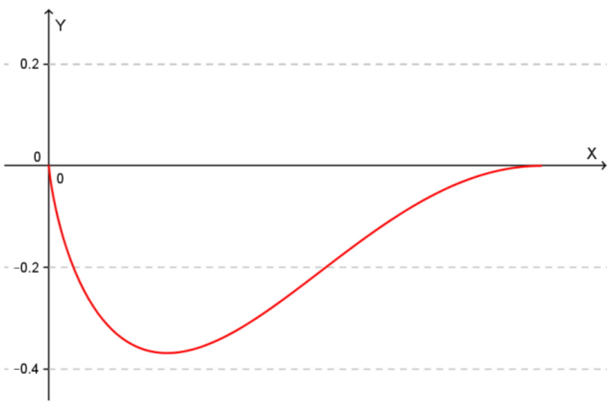
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

Risulta:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{sen2h \cdot ln(sen2h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{sen2h}{h}\right) \cdot ln(sen2h) =$$

$= 2 \cdot \lim_{h \to 0^+} \ln(sen2h) = -\infty$: quindi la funzione non è derivabile in x=0.

Il grafico della funzione è il seguente:



QUESITO 3

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x+2)^{\ln(e+2x)}$$

nel punto P(0,2).

La tangente in P ha equazione: $y - 2 = f'(0)(x-0)$.

Riscriviamo la funzione nella seguente forma:

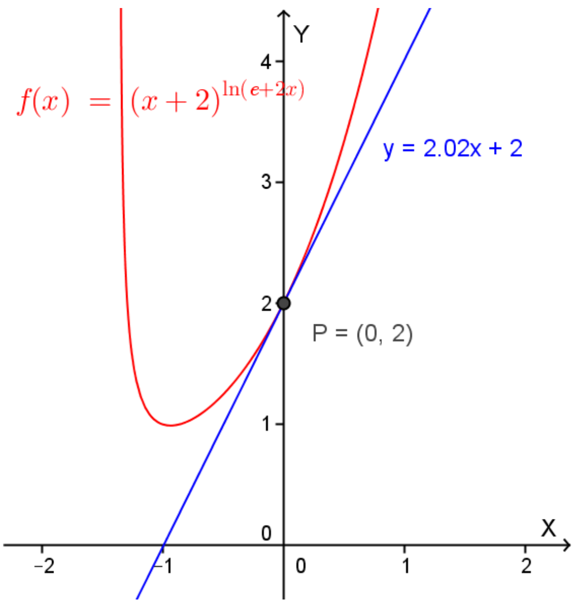
$f(x) = e^{ln\left[(x+2)^{\ln(e+2x)}\right]} = e^{\ln(e+2x)\cdot\ln(x+2)}$ (N.B. la funzione è definita per $x > -\frac{e}{2}$).

$$f'(x) = e^{\ln(e+2x)\cdot\ln(x+2)} \cdot \left[\frac{2}{e+ex} \cdot \ln(x+2) + \frac{\ln(e+2x)}{x+2}\right]$$

$f'(0) = 2 \cdot \left[\frac{2}{e} \cdot \ln(2) + \frac{1}{2}\right] = \frac{4}{e} \cdot \ln(2) + 1$ quindi la tangente in P ha equazione:

$y - 2 = \left[\frac{4}{e} \cdot \ln(2) + 1\right] \cdot x \implies y = \left[\frac{4}{e} \cdot \ln(2) + 1\right] \cdot x + 2 \cong 2.02\, x + 2$

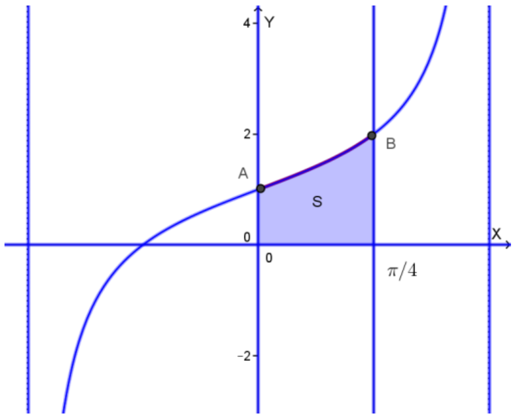
Questa la situazione grafica:



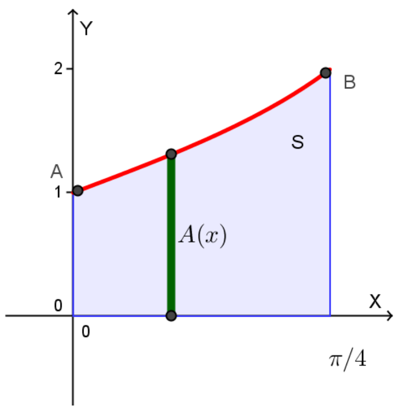
QUESITO 4

La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + tgx$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

La superficie S è rappresentata nella seguente figura:



Rappresentiamo più in dettaglio la superficie S:



Il volume del solido Σ è dato da:

$$V = \int_0^{\pi/4} A(x)\, dx$$

Essendo A(x) l'area del triangolo equilatero di lato f(x), quindi: $A(x) = \left(f(x)\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$A(x) = (1 + tgx)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = (1 + 2tgx + tg^2x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$V = \int_0^{\pi/4} A(x)dx = \int_0^{\pi/4} (1 + 2tgx + tg^2x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\pi/4} (1 + 2tgx + tg^2x)dx =$$

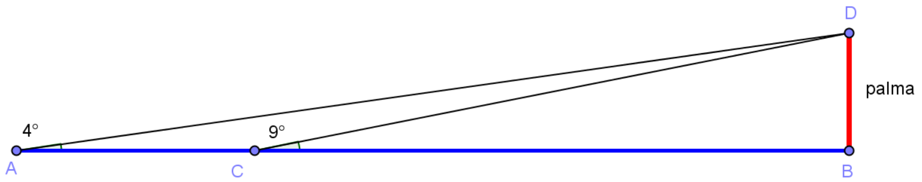
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(1+tg^2x)+2tgx]dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2tgx)dx\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{senx}{cosx}\right)dx\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}[tgx-2\ln(cosx)]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-2ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}[1+\ln(2)]\,u^3\cong 0.733\,u^3=V$$

QUESITO 5

Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4°; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura 9°. Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?



Al primo avvistamento della palma: $B\hat{A}D=4°$; da A a C trascorrono 20 minuti; $B\hat{C}D=9°$. Dobbiamo calcolare il tempo in minuti che impiega il capo tuareg per raggiungere l'albero

Indichiamo con t il tempo in minuti impiegato per passare da C a B.

$BD=AB\cdot tg4°=BC\cdot tg9°$; ma, essendo la velocità costante: $\frac{CB}{t}=\frac{AC}{20}\ \Longrightarrow CB=\frac{t\cdot AC}{20}$

Ma $AB=AC+CB=AC+\frac{t\cdot AC}{20}=AC\left(1+\frac{t}{20}\right)$; quindi, da $AB\cdot tg4°=BC\cdot tg9°$:

$$AC\left(1+\frac{t}{20}\right)\cdot tg4°=\frac{t\cdot AC}{20}\cdot tg9°\ \Longrightarrow\ (20+t)\cdot tg4°=t\cdot\ tg9°\ \Longrightarrow$$

$$t(tg9°-tg4°)=20\cdot tg4°\quad\Longrightarrow\quad t=\frac{20\,tg4°}{tg9°-tg4°}\cong 15.81\ minuti\ \cong 15'49"$$

QUESITO 6

Si determinino i coefficienti dell'equazione $y=\frac{ax^2+4}{bx+2}$ *perché la curva rappresentativa ammetta asintoto di equazione* $y=x+2$.

Devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1 = m \qquad e \quad \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+4}{bx^2+2x} = 1 \qquad se \quad \frac{a}{b} = 1$$

$$q = 2 = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+4}{ax+2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+4-ax^2-2x}{ax+2}\right) = -\frac{2}{a} = 2$$

$se\ a = -1$

Si deve quindi avere: $a = b = -1$ e la funzione ha equazione:

$y = \frac{-x^2+4}{-x+2} = \frac{(2-x)(2+x)}{2-x} = 2 + x \quad (con\ x \neq 2)$: si tratta quindi di una retta privata di un punto.

QUESITO 7

Tenuto conto che:

$$\log 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$$

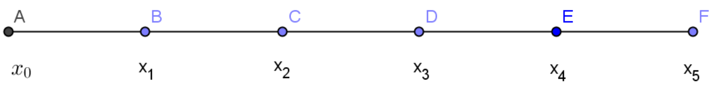
si calcoli un'approssimazione di $\log 2$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Posto $f(x) = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$, consideriamo l'intervallo $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ e dividiamolo in n parti; poniamo $h = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{n} = \frac{\pi}{2n}$.

Utilizzando, per esempio, la formula dei trapezi, l'integrale dato può essere approssimato mediante la formula:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

Nel nostro caso, ponendo per esempio n=5, abbiamo $h = \frac{\pi}{10}$



$$x_0 = 0,\ \ x_1 = \frac{\pi}{10},\quad x_2 = \frac{\pi}{5},\quad x_3 = \frac{3}{10}\pi,\quad x_4 = \frac{2}{5}\pi,\quad x_5 = \frac{\pi}{2}$$

Quindi si ha la seguente approssimazione:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{cosx}{1+senx}\,dx \cong \frac{\pi}{10}\left[\frac{f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}+f\left(\frac{\pi}{10}\right)+f\left(\frac{\pi}{5}\right)+f\left(\frac{3}{10}\pi\right)+f\left(\frac{2}{5}\pi\right)\right] \cong 0.6972$$

Quindi: $log(2) \cong 0.697$

Notiamo che il valore esatto di log(2) è:

$\log(2) \approx 0.6931471805599453$

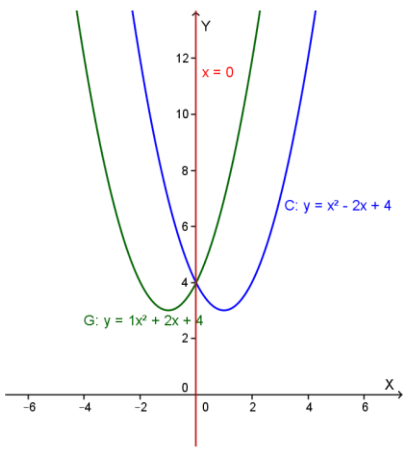
QUESITO 8

Sia C la curva d'equazione $y = x^2 - 2x + 4$ *, e sia G la curva simmetrica di C rispetto all'asse y. Qual è l'equazione di G?*

La simmetria rispetto all'asse y ha equazioni:

$$\begin{cases} X = -x \\ Y = y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = -X \\ y = Y \end{cases}$$

Quindi la curva G ha equazione: $Y = X^2 + 2X + 4$



QUESITO 9

Si determini la probabilità che nel lancio di due dadi si presenti come somma un numero dispari. Lanciando 5 volte i due dadi, qual è la probabilità di ottenere come somma un numero dispari almeno due volte?

I casi possibili sono 6x6=36, i casi favorevoli sono 18 e sono dati da:

(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5).

La probabilità che nel lancio di due dadi si presenti come somma un numero dispari è quindi data da:

$$p(somma\ pari) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = p(somma\ dispari)$$

Lanciamo i due dadi 5 volte.

La probabilità di ottenere come somma un numero dispari almeno 2 volte è pari a:

$$1 - p(somma\ dispari\ zero\ volte) - p(somma\ dispari\ 1\ volta)$$

Sia E l'evento: "nel lancio di due dadi esce somma dispari"; risulta: $p(E) = \frac{1}{2}$

La probabilità q dell'evento contrario $\bar{E}$ è $q = 1 - p = \frac{1}{2}$

$$p(somma\ dispari\ zero\ volte\ su\ 5\ lanci) = \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot q^5 = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

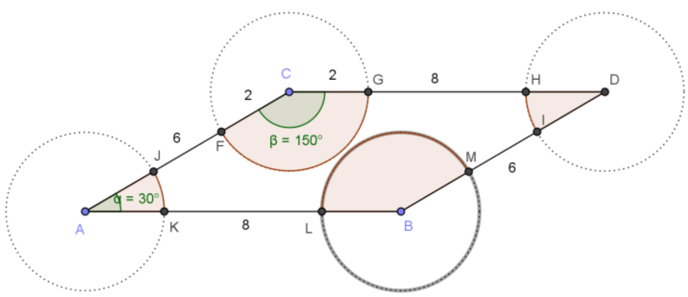
$$p(somma\ dispari\ 1\ volta\ su\ 5\ lanci) = \binom{5}{1} \cdot p^1 \cdot q^4 = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$1 - p(somma\ dispari\ zero\ volte) - p(somma\ dispari\ 1\ volta) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$$

$$= 1 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - \frac{6}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} = 0.8125 \cong 81\%$$

QUESITO 10

Si scelga a caso un punto all'interno di un parallelogramma, avente i lati lunghi rispettivamente $8\ m$ e $6\ m$ e gli angoli acuti di 30°. Si determini la probabilità che la sua distanza da ogni vertice sia maggiore di $2\ m$.



$$p = \frac{Area\ favorevole}{Area\ possibile} = \frac{Area\ parallelogramma - Area\ quattro\ settori\ interni}{Area\ parallelogramma} =$$

$$= \frac{8 \cdot 6 \cdot sen(30°) - Area\ 1\ cerchio\ di\ raggio\ 2}{8 \cdot 6 \cdot sen(30°)} = \frac{24 - 4\pi}{24} = 1 - \frac{\pi}{6} \cong 0.476 \cong 48\%$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri