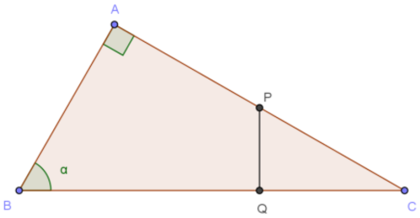
ORDINAMENTO 2012 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

Il triangolo ABC, rettangolo in A, ha l'ipotenusa BC =2a; sia P il punto medio di AC, Q la sua proiezione ortogonale su BC e $A\hat{B}C = \alpha$.



1)

Si calcoli il rapporto:

$$\frac{PQ + QC}{BQ}$$

e lo si esprima in funzione di $x = tg\alpha$, *controllando che risulti:*

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 2} \ .$$

Risulta: $AC = BC \cdot sin\alpha = 2a\ sin\alpha$, $PC = a\ sin\alpha$, $QC = PC \cdot \cos \hat{C} = (a\ sin\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$QC = \ a \sin^2 \alpha$, $PQ = \ PC \cdot \sin \hat{C} = (a\ sin\alpha) cos\ \alpha,$ $\quad BQ = 2a - QC = 2a - a \sin^2 \alpha$

$$\frac{PQ + QC}{BQ} = \frac{(a\ sin\alpha)cos\ \alpha + a \sin^2 \alpha}{2a - a \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{2} sin(2\alpha) + \sin^2 \alpha}{2 - \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} + \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}}{2 - \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}} =$$

$$= \frac{tg\alpha + tg^2\alpha}{2(1 + tg^2\alpha) - tg^2\alpha} = \frac{tg\alpha + tg^2\alpha}{2 + tg^2\alpha} = \frac{x^2 + x}{x^2 + 2} = f(x) \ \ c.v.d.$$

Notiamo che $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $quindi:\ x > 0$.

2)

Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico γ .

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 2}$$

Dominio:

Prescindendo dal limite geometrico sulla x, la funzione è definita su tutto R.
La funzione non è pari né dispari.

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: y=0 ; se y=0: x=0 e x=-1.

Positività:

La funzione è positiva o nulla se $x^2 + x \geq 0$, $\leq -1 \ or \ x \geq 0$.

Limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2} = 1$$

Asintoti:

Asintoto y=1 per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2 + 4x - x^2}{(x^2 + 2)^2} \geq 0 \quad se \quad -x^2 + 4x + 2 \geq 0\,,\ x^2 - 4x - 2 \leq 0\ ,$$

$$2 - \sqrt{6} \leq x \leq 2 + \sqrt{6}$$

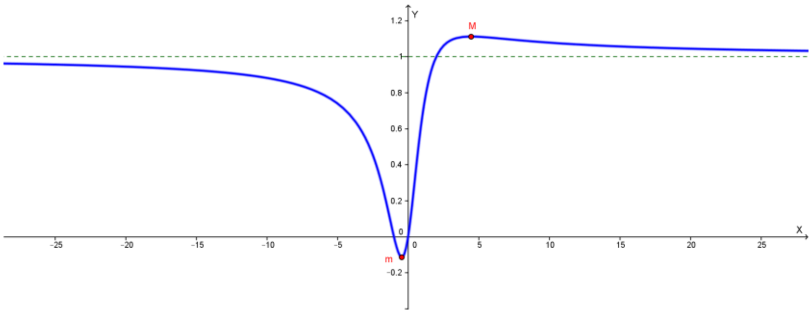
Pertanto la funzione è crescente se $2 - \sqrt{6} < x < 2 + \sqrt{6}$, decrescente nella parte rimanente.
Abbiamo un minimo relativo (ed assoluto) per $x = 2 - \sqrt{6}$, con ordinata $\frac{2-\sqrt{6}}{4}$, ed un massimo relativo (ed assoluto) per $x = 2 + \sqrt{6}$, con ordinata $\frac{2+\sqrt{6}}{4}$.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 - 12x + 8}{(x^2+2)^3} \geq 0 \quad se \quad x^3 - 6x^2 - 6x + 4 \leq 0$$

La derivata seconda non si può studiare in modo elementare ma, in base alle altre informazioni sullo studio della funzione, possiamo affermare che ci sono tre flessi (come si vede nel grafico seguente).

Grafico della funzione:



3)

Si determinino le coordinate del punto $D(x_D; y_D)$ in cui la curva γ incontra il suo asintoto e si scrivano le equazioni della tangente e della normale in tale punto.

Cerchiamo il punto D:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = \dfrac{x^2+x}{x^2+2} \end{cases}, \quad \frac{x^2+x}{x^2+2} = 1, \quad x^2 + x = x^2 + 2, \quad x = 2 : \quad D = (2; 1)$$

Essendo: $f'(x) = \frac{2+4x-x^2}{(x^2+2)^2}$

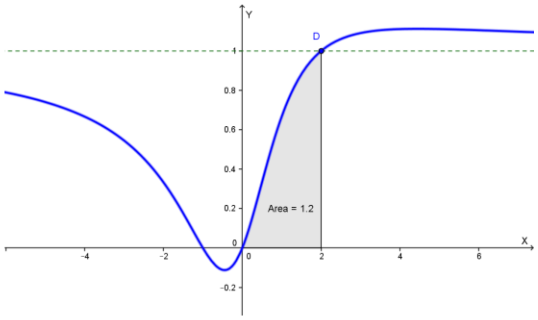
Risulta: $f'(2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Tangente in D: $y - 1 = \frac{1}{6}(x-2)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$

Normale in D: $y - 1 = -6(x-2)$, $y = -6x + 13$

4)

Si determini l'area della superficie piana, appartenente al I quadrante, delimitata dall'asse delle ascisse, dalla curva γ e dalla retta $x = x_D$.



L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area = \int_0^2 \frac{x^2+x}{x^2+2}\,dx = \int_0^2 \frac{(x^2+2)+x-2}{x^2+2}\,dx = \int_0^2 dx + \int_0^2 \frac{x}{x^2+2}\,dx - \int_0^2 \frac{2}{x^2+2}\,dx =$$

$$= [x]_0^2 + \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\,dx = 2 + \frac{1}{2}ln6 - \frac{1}{2}ln2 - \sqrt{2}\int_0^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}ln3 - \sqrt{2}\left[arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^2 = 2 + \frac{1}{2}ln3 - \sqrt{2}\left(arctg(\sqrt{2})\right) = 2 + \frac{1}{2}ln3 - \sqrt{2}arctg(\sqrt{2})$$

$$\cong 1.1983\ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria