ORDINAMENTO 2012 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{x-5}} \ .$$

1)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

$$f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{x-5}}$$

Dominio:

La funzione è definita se $x-5>0$, $x>5$: $5<x<+\infty$.

Visto il dominio, la funzione non può essere pari né dispari.

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: la funzione non esiste; se y=0: $x=-\frac{2}{3}$, $non\ accettabile$.

Positività:

$f(x) \geq 0 \quad se \quad 3x+2 \geq 0: \quad sempre\ nel\ dominio.$

Limiti:

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{3x+2}{\sqrt{x-5}} = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x-5}} = +\infty$$

Asintoti:

Asintoto x=5 per $x \to 5^+$; non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ poiché la funzione non è un infinito del primo ordine.

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{3x-32}{2(x-5)\sqrt{x-5}} \geq 0 \quad se \quad 3x-32 \geq 0: \ x \geq \frac{32}{3}$$

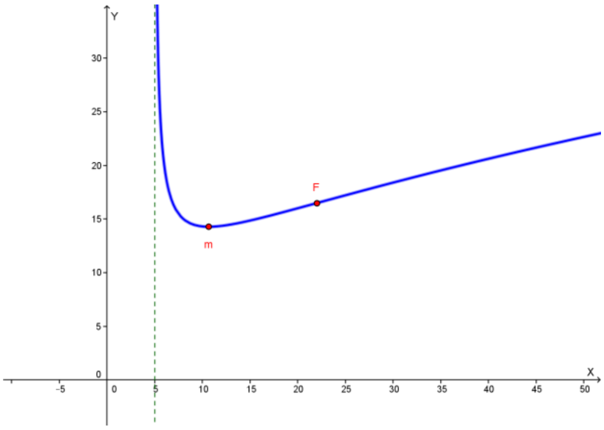
Pertanto la funzione è crescente se $x > \frac{32}{3}$, decrescente per $5 < x < \frac{32}{3}$.
Abbiamo un minimo relativo (ed assoluto) per $x = \frac{32}{3} \cong 10.7$, con ordinata $f\left(\frac{32}{3}\right) = 2\sqrt{51} \cong 14.3$.

Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{3(x-22)}{4(x-5)^{\frac{5}{2}}} \geq 0 \quad se \ \mathrm{x} \leq 22 \ .$$

Il grafico volge la concavità verso l'alto se $5 < x < 22$ e verso il basso se $x > 22$.
Abbiamo quindi un flesso per $x = 22,$ con ordinata: $f(22) \cong 4\sqrt{17} \cong 16.49$

Grafico della funzione:



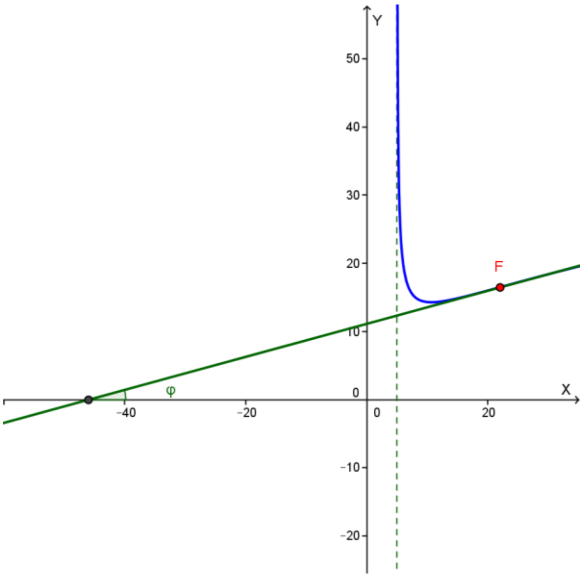
2)

Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo φ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x.

Il punto di flesso ha coordinate $F = (22; 4\sqrt{17})$. La tangente in F è:

$$y - 4\sqrt{17} = f'(22)(x-22) \quad ; \quad f'(22) = \frac{\sqrt{17}}{17} \cong 0.24; \quad quindi:$$

$$y - 4\sqrt{17} = \frac{\sqrt{17}}{17}(x-22), \quad y = \frac{\sqrt{17}}{17}x + \frac{46}{17}\sqrt{17}$$



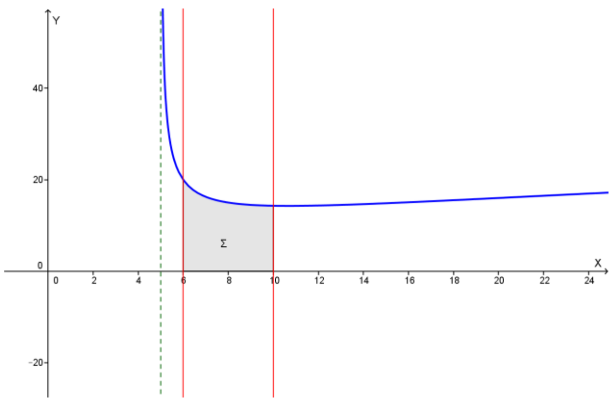
Risulta:

$$tg\varphi = m = \frac{\sqrt{17}}{17} \text{ quindi:}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right) \cong 13.633° \cong 13°38'$$

3)

Si calcoli il volume del solido Ω, generato dalla superficie piana Σ, delimitata dalla curva γ, dall'asse delle x e dalle rette x =6 e x=10, in una rotazione completa attorno all'asse x.



Il volume richiesto si ottiene mediante il seguente integrale:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_6^{10} \left(\frac{3x+2}{\sqrt{x-5}}\right)^2 dx = \pi \int_6^{10} \frac{(3x+2)^2}{x-5}\, dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int \frac{(3x+2)^2}{x-5}\, dx = \int \frac{9x^2+12x+4}{x-5}\, dx$$

Eseguendo la divisione del numeratore per il denominatore otteniamo:

$9x^2 + 12x + 4 = (x - 5)(9x + 57) + 289$

Quindi:

$$\int \frac{9x^2 + 12x + 4}{x - 5}\, dx = \int \frac{(x - 5)(9x + 57) + 289}{x - 5}\, dx = \int \left(9x + 57 + \frac{289}{x - 5}\right) dx =$$

$$= \frac{9}{2}x^2 + 57x + 289 \ln|x - 5| + C$$

Pertanto:

$$\pi \int_6^{10} \frac{(3x + 2)^2}{x - 5}\, dx = \pi \left[\frac{9}{2}x^2 + 57x + 289 \ln|x - 5|\right]_6^{10} = \pi[1020 + 289 \ln(5) - 504] =$$

$$= \pi[516 + 289 \ln(5)]\ u^3 \cong 981.128\, \pi\ u^3 \cong 3082.303\ u^3 = Volume(\Omega)$$

4)

Se tutte le misure fossero espresse in dm, potrebbe un recipiente, avente la stessa capacità del solido Ω, contenere $3\ m^3$ di acqua?

Il volume del solido è:

$$Volume(\Omega) = 3082.303\ dm^3 = 3.082\ m^3$$

Quindi un recipiente con la stessa capacità di Ω potrebbe contenere $3\ m^3$ di acqua.

Con la collaborazione di Angela Santamaria