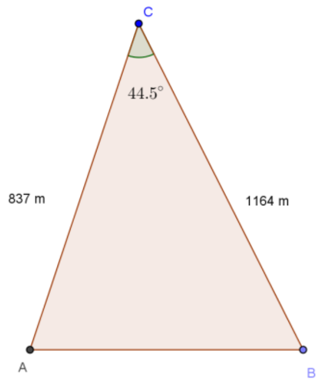
ORDINAMENTO 2012 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Alcuni ingegneri si propongono di costruire una galleria rettilinea che colleghi il paese A, situato su un versante di una collina, col paese B, che si trova sul versante opposto. Da una terza località C i progettisti misurano le distanze CA=837 metri, CB=1164 metri e l'angolo ACB la cui ampiezza è 44,5°. Si calcoli quale sarà la lunghezza della galleria.



Basta applicare il teorema del coseno:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(44.5°) = [837^2 + 1164^2 - 2 \cdot 837 \cdot 1164 \cdot \cos(44.5°)]\ m$$

$AB^2 = 665670.82\ \mathrm{m}^2$, $AB \cong 816\ m$.

QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $\frac{1}{1-cosx} - \frac{2}{x^2}$ *quando x tende a 0.*

Il limite si presenta nella forma indeterminata $[+\infty - \infty]$.

$$\frac{1}{1-cosx} - \frac{2}{x^2} = \frac{1+cosx}{sen^2x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + x^2cosx - 2sen^2x}{x^2sen^2x}$$

Si potrebbe applicare (più volte) la regola di de L'Hōpital ma preferiamo proporre una soluzione che utilizzi gli sviluppi di Taylor, ricordando che, se x tende a 0, risulta:

$cosx = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad , \quad senx = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Quindi:

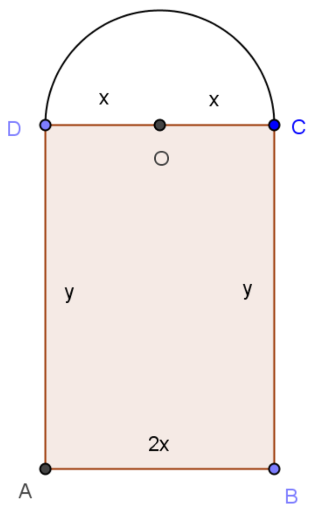
$$\frac{x^2 + x^2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad\right) - 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2}{x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - 2\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \sim \frac{\frac{1}{6}x^4}{x^4} = \frac{1}{6}$$

Il limite richiesto è quindi $\frac{1}{6}$.

QUESITO 3

Una finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un semicerchio avente per diametro un lato del rettangolo; il contorno della finestra misura L. Si determinino le dimensioni del rettangolo affinché l'area totale della finestra sia massima.



Indicato con 2x il lato del rettangolo che coincide con il diametro della semicirconferenza e con y la misura dell'altro lato del rettangolo, osservando che il contorno della finestra è formato dai lati AD, AB e BC del rettangolo e dalla semicirconferenza di diametro CD (senza diametro), si ha:

$$2x + 2y + \pi x = L$$

Da cui: $y = \frac{L}{2} - x - \frac{\pi x}{2}$

L'area della finestra è data da:

$$Area(finestra) = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2 = 2x\left(\frac{L}{2} - x - \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$Area = xL - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2 = \left(-2 - \frac{1}{2}\pi\right)x^2 + xL = z$$

La funzione da ottimizzare è una parabola con la concavità rivolta verso il basso, quindi il massimo si ha nel vertice (se inclusso nelle limitazioni della x):

$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{L}{4+\pi} < L \;\; quindi \; accettabile$. L'area massima risulta:

$$Area(massima) = \left(-2-\frac{1}{2}\pi\right)\left(\frac{L}{4+\pi}\right)^2 + \frac{L^2}{4+\pi} = -\frac{1}{2}(4+\pi)\frac{L^2}{(4+\pi)^2} + \frac{L^2}{4+\pi} = \frac{L^2}{2(4+\pi)}$$

QUESITO 4

Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione: $f(x) = \log_x(x^2+4)$ *nel punto P di ascissa x=2.*

Osserviamo che la funzione è definita per x>0 e x diverso da 1. Trasformiamo il logaritmo in logaritmo naturale:

$$f(x) = \log_x(x^2+4) = \frac{\ln(x^2+4)}{\ln(x)}, \quad f(2) = \frac{ln8}{ln2} = \frac{3\ln(2)}{\ln(2)} = 3$$

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+4}\cdot\ln(x) - \frac{1}{x}\cdot\ln(x^2+4)}{\ln^2(x)}, \qquad f'(2) = \frac{\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(8)}{\ln^2(2)} = \frac{\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(2)}{\ln^2(2)} =$$

$$= \frac{-\ln(2)}{\ln^2(2)} = -\frac{1}{\ln(2)} = m$$

Quindi la tangente ha equazione:

$$y - 3 = -\frac{1}{\ln(2)}(x-2), \qquad y = -\frac{1}{\ln(2)}x + \frac{2}{\ln(2)} + 3$$

QUESITO 5

La superficie piana S, delimitata dalla curva γ *di equazione* $y = x^2\sqrt{x+1}$ *e dall'asse x nell'intervallo* $-1 \le x \le 0$, *è la base di un solido* Σ, *le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di* Σ.

Osserviamo che la funzione nell'intervallo indicato non è mai negativa, in particolare si annulla agli estremi dell'intervallo. Il volume richiesto si ottiene mediante il seguente integrale (a e b sono gli estremi dell'intervallo, A(x) è l'area della sezione, che nel nostro caso è un quadrato di lato y:

$$\int_a^b A(x)dx = \int_{-1}^{0}\left(x^2\sqrt{x+1}\right)^2 dx = \int_{-1}^{0}(x^5+x^4)dx = \left[\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{30}\ u^3$$

QUESITO 6

Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & per -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{e^{x^2} - 1}{x\ senx}, & per\ 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Si dica se essa è continua nel punto x = 0.

Siccome f(0)=1, dobbiamo verificare che per x che tende a 0^+ la funzione $\frac{e^{x^2}-1}{x\ senx}$ tende a 1.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x\ senx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{x}{senx} = 1 \cdot 1 = 1$$

Quindi la funzione è continua in x=0.

QUESITO 7

Si determini il campo di esistenza della funzione $y = log\frac{8-x}{3x+2} + \sqrt{5 + 4x - x^2}$.

Il campo di esistenza della funzione si ottiene risolvendo il seguente sistema:

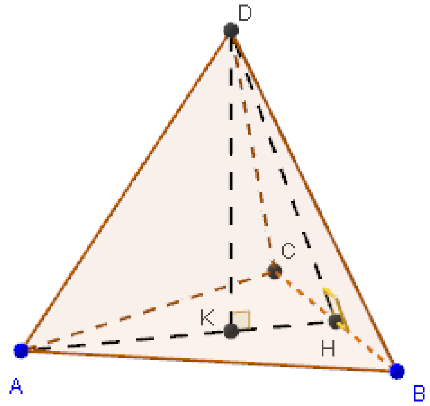
$$\begin{cases} \dfrac{8 - x}{3x + 2} > 0 \\ 5 + 4x - x^2 \ge 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{x - 8}{3x + 2} < 0 \\ x^2 - 4x - 5 \le 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -\dfrac{2}{3} < x < 8 \\ -1 \le x \le 5 \end{cases}$$

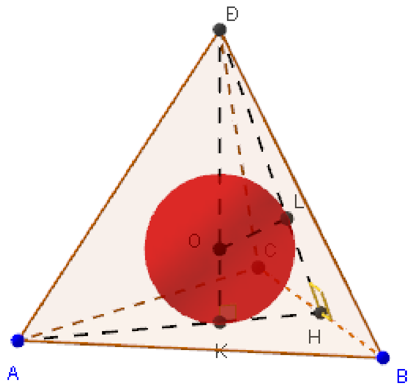
Il campo di esistenza della funzione è quindi: $-\frac{2}{3} < x \le 5$.

QUESITO 8

Un tetraedro regolare di rame (densità $\rho = 8.9\ g/cm^3$*), avente lo spigolo L= 6 cm, presenta all'interno una cavità di forma sferica. Sapendo che la massa del tetraedro è m= 200 g, si calcoli la lunghezza del raggio della cavità.*

Dobbiamo calcolare il volume del tetraedro:





Essendo L lo spigolo del tetraedro si ha:

$$Area(ABC) = L^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\overline{DH} = \overline{BH} \cdot \sqrt{3} = \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Essendo K il baricentro del triangolo equilatero ABC, risulta:

$$\overline{HK} = \frac{1}{3}\overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{DH} = \frac{1}{3}\left(L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = L \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\overline{DK} = \sqrt{\overline{DH}^2 - \overline{KH}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}L^2 - \frac{L^2}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}L^2} = L\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot Area(ABC) \cdot \overline{DK} = \frac{1}{3} \cdot \left(L^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \left(L\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{L^3\sqrt{2}}{12} = Volume(tetraedro)$$

Essendo L= 6 cm, risulta:

$$Volume(tetraedro\ pieno) = 216 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}\ cm^3 \cong 25.456\ cm^3$$

Essendo $\rho = \frac{m}{V}$, $si\ ha$: $V = \frac{m}{\rho} = \frac{200\ g}{8.9\ g/cm^3} \cong 22.472\ cm^3$ (volume tetraedro vuoto).

Quindi:

$V(cavità) = V(sfera) = (25.456 - 22.472)\ cm^3 = 2.984\ cm^3$; pertanto:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2.984\ cm^3\ ; \quad R^3 = \left(2.984 \cdot \frac{3}{4\pi}\right)\ cm^3 \cong 0.712\ cm^3\ ; \quad R = \sqrt[3]{0.712} = 0.893\ cm$$

QUESITO 9

Si calcoli il valore medio della funzione: $y = \frac{x^5-1}{x^2+1}$ *, nell'intervallo* $0 \le x \le 1$.

Ricordiamo che il valor medio di una funzione f(x) continua in un intervallo [a; b] è dato da:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{1-0} \cdot \int_0^1 \frac{x^5-1}{x^2+1} dx$$

Effettuando la divisione del numeratore per il denominatore si ha:

$$x^5 - 1 = (x^2+1)(x^3-x) + x - 1$$

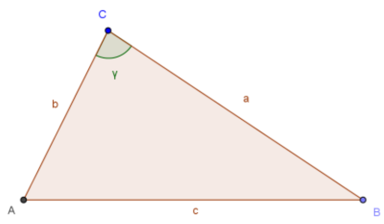
$$\frac{1}{1-0} \cdot \int_0^1 \frac{x^5-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1)(x^3-x)+x-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 (x^3-x)dx + \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{-1}{x^2+1} dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - arctg(x)\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \left[\frac{1}{2} ln2 - \frac{\pi}{4}\right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} ln2 - \frac{\pi}{4} = valor\ medio.$$

QUESITO 10

Si dimostri che il teorema di Pitagora è un caso particolare del teorema di Carnot.



Per il teorema di Carnot risulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\gamma$$

Se l'angolo γ è retto risulta: $c^2 = a^2 + b^2$ che esprime il teorema di Pitagora.

Con la collaborazione di Angela Santamaria