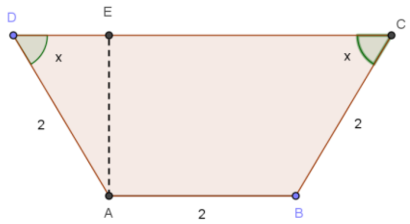
PNI 2012 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

La sezione trasversale di un canale di irrigazione ha la forma di un trapezio isoscele con la base maggiore in alto. Sia la base minore che i due lati obliqui misurano 2 metri.



1)

Se x è l'angolo acuto del trapezio, si dimostri che l'area della sezione trasversale del canale è:

$$A(x) = 4senx(1 + cosx).$$

Risulta: $AE = 2senx$, $DE = 2cosx$, $DC = 2 + 2(DE) = 2 + 4cosx$. Quindi:

$A(x) = \frac{(AB+CD)AE}{2} = \frac{(2+2+4cosx)2senx}{2} = 4senx(1 + cosx)$ c.v.d.

2)

Si studi la funzione A(x) e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

$A(x) = f(x) = 4senx(1 + cosx)$

Dominio:

La funzione è continua e derivabile nell'intervallo di studio $0 \le x \le 2\pi$.

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: y=0 ; se y=0: senx=0, cosx=-1 , quindi: $x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$.

Positività:

La funzione è positiva o nulla se $senx(1 + cosx) \geq 0$, $senx \geq 0$ $(cosx \geq -1\ sempre)$,
Quindi la funzione è positiva o nulla se $0 \leq x \leq \pi$.

Limiti:

Non ci sono limiti da calcolare.

Asintoti:

Non ci sono asintoti.

Derivata prima:

$f'(x) = 4\text{cosx} + 4\cos^2 x - 4sen^2x = 8\cos^2 x + 4cosx - 4 \geq 0 \quad se \quad 2\cos^2 x + cosx - 1 \geq 0$

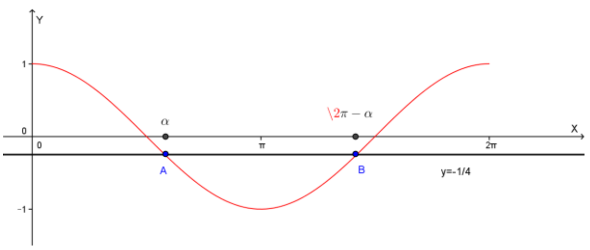
$cosx \leq -1 \quad or \quad cosx \geq \frac{1}{2} \quad ; \quad x = \pi \ , \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \ , \ \frac{5}{3}\pi \leq x \leq 2\pi$

Pertanto la funzione è crescente se $0 < x < \frac{\pi}{3} \quad e \quad \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$ decrescente nella parte rimanente.
Abbiamo un massimo relativo (ed assoluto) per $x = \frac{\pi}{3}$, con ordinata $3\sqrt{3}$, ed un minimo relativo (ed assoluto) per $x = \frac{5}{3}\pi$, con ordinata $-3\sqrt{3}$. Inoltre per $x = \pi$ abbiamo un flesso a tangente orizzontale (ordinata 0).

Derivata seconda:

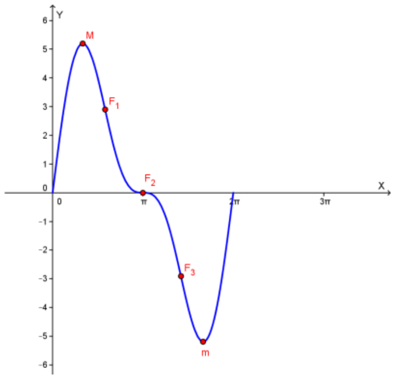
$f''(x) = -4\,\text{senx} - 16\,\text{cosx senx} \geq 0 \quad se \quad senx + 4cosx\ senx \leq 0; \quad senx(1 + 4cosx) \leq 0$

$senx \geq 0 \ se \ \ 0 \leq x \leq \pi, \quad 1 + 4cosx \geq 0 \ se \ \ cosx \geq -\frac{1}{4}$:



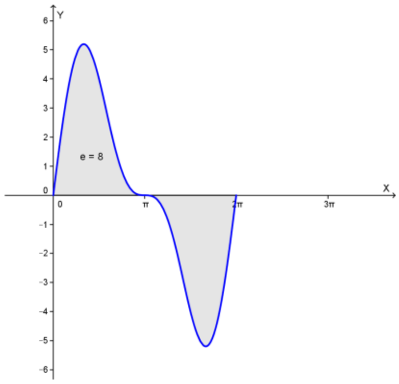
Quindi risulta $f''(x) \geq 0 \quad se \quad \alpha \leq x \leq \pi \ \ e \ \ 2\pi - \alpha \leq x \leq 2\pi$, $con\ \cos(\alpha) = -\frac{1}{4}$.
Il grafico ha quindi la concavità verso l'alto se $\alpha < x < \pi \ \ e \ \ 2\pi - \alpha < x < 2\pi$ e verso il basso se $0 < x < \alpha \ \ e \ \ \pi < x < 2\pi - \alpha$. Si ha dei flessi per $x = \alpha, x = \pi, \ x = 2\pi - \alpha$
Con ordinate rispettivamente: $f(\alpha) \cong 2.9$, $f(\pi) = 0$, $f(2\pi - \alpha) \cong -2.9$.

Grafico della funzione:



3)

Si calcoli l'area della regione di piano σ limitata dalla curva γ e dall'asse delle x.



Data la simmetria della regione, la sua area è il doppio del seguente integrale:

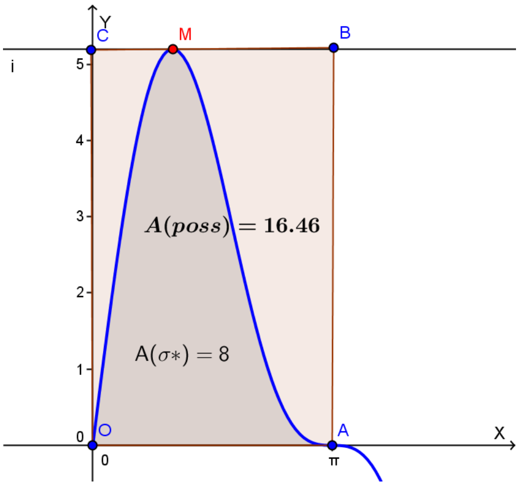
$$\int_0^{\pi} 4senx(1+cosx)\,dx = 4\int_0^{\pi}(senx+senxcosx)dx = 4\left[-cosx-\frac{1}{4}cos2x\right]_0^{\pi} =$$

$= 4\left[1-\frac{1}{4}-\left(-1-\frac{1}{4}\right)\right] = 4(2) = 8$. Quindi: $Area(\sigma) = 16\ u^2$.

4)

Si scelga a caso un punto all'interno del rettangolo determinato dagli assi cartesiani, dalla retta $x=\pi$ e dalla tangente alla curva γ nel suo punto di massimo relativo. Si determini la probabilità che il punto scelto a caso risulti esterno a σ.

L'area del rettangolo indicato è: $Area(poss) = \pi \cdot 3\sqrt{3}$
L'area di σ interna al rettangolo è $A(\sigma *) = 8$
L'area favorevole è $A(fav) = \pi \cdot 3\sqrt{3} - 8$



La probabilità richiesta è quindi:

$$p = \frac{Area(favorevole)}{Area(possibile)} = \frac{\pi \cdot 3\sqrt{3} - 8}{\pi \cdot 3\sqrt{3}} = 1 - \frac{8}{\pi \cdot 3\sqrt{3}} \cong 0.5099 \cong 0.51 = 51\ \%$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria