PNI 2012 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + 2lnx + 2}{x} .$$

1)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + 2lnx + 2}{x}$$

Dominio:

La funzione è definita se $x > 0$: $0 < x < +\infty$.

Visto il dominio, la funzione non può essere pari né dispari.

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: la funzione non esiste; se y=0: $\ln^2 x + 2lnx + 2 = 0$, $mai\ \ (delta = 4 - 8 < 0)$

Positività:

$f(x) \geq 0\ \ se\ \ \ln^2 x + 2lnx + 2 \geq 0 :\ \ \ sempre\ > 0\ nel\ dominio.$

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x + 2lnx + 2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x + 2lnx + 2}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0^+$$

Asintoti:

Asintoto x=0 per $x \to 0^+$; asintoto y=0 per $x \to +\infty$.

Derivata prima:

$f'(x) = \dfrac{-\ln^2 x}{x^2} \geq 0 \quad se \quad mai > 0, = 0 \; se \ln^2 x = 0, \;\; x = 1$

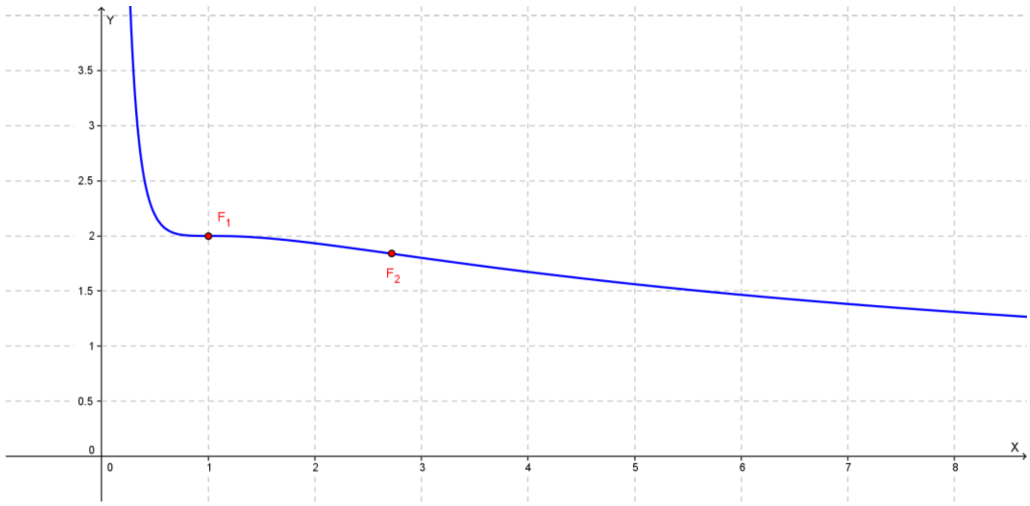
Pertanto la funzione è sempre decrescente ed ha un flesso a tangente orizzontale per $x = 1$, con ordinata 2.

Derivata seconda:

$f''(x) = \frac{2\ln^2 x - 2lnx}{x^3} \geq 0 \quad se \;\; 2\ln^2 x - 2lnx \leq 0\,, \;\; \mathrm{lnx} \leq 0 \;\; \mathrm{or} \;\; \mathrm{lnx} \geq 1\!: \; 0 < \mathrm{x} \leq 1 \;\; \mathrm{or} \;\; \mathrm{x} \geq \mathrm{e}\;.$

Il grafico volge la concavità verso l'alto se $0 < x < 1 \quad e \quad x > e$, verso il basso se $1 < x < x < e$. Abbiamo quindi due flessi, uno per $x = 1$, con ordinata: $f(1) = 2$ l'altro per $x = e$, con ordinata $f(e) = \frac{5}{e} \cong 1.84$

Grafico della funzione:

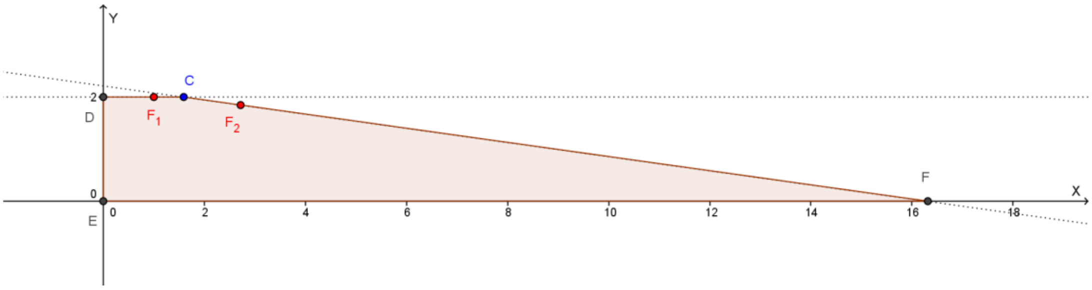


2)

Si scrivano le equazione delle tangenti a γ nei punti di flesso e si calcoli l'area del trapezio che esse formano con gli assi cartesiani.

I due flessi hanno coordinate: $F_1 = (1; 2),\; F_2 = \left(e; \frac{5}{e}\right)$.
Risulta: $f'(1) = 0\,, \quad f'(e) = -\frac{1}{e^2}$

La tangente in F_1 è $y = 2$.
La tangente in F_2 è $y - \frac{5}{e} = -\frac{1}{e^2}(x - e),\; y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{6}{e}$.



Cerchiamo l'intersezione delle due tangenti:

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{6}{e} \end{cases} \; ; \quad -\frac{1}{e^2}x + \frac{6}{e} = 2 \; ; \quad -x + 6e = 2e^2 \; ; \quad x = 6e - 2e^2 \cong 1.5$$

L'ascissa dell'intersezione della tangente in F_2 con l'asse x è:

$$-\frac{1}{e^2}x + \frac{6}{e} = 0 \, , \quad -x + 6e = 0 \; , \qquad x = 6e \cong 16.3$$

L'area del trapezio è quindi:

$$Area(trapezio) = \frac{(6e + 6e - 2e^2)2}{2} = (12e - 2e^2)\, u^2 \cong 17.84\, u^2$$

3)

Si calcoli il volume del solido generato dal suddetto trapezio in una rotazione completa attorno all'asse x.

Il volume richiesto (costituito da un cilindro e da un cono) è dato da:

$$V(cilindro) = \pi(2)^2(6e - 2e^2) = 8\pi(3e - e^2)$$

$$Volume(cono) = \frac{1}{3}\pi(2)^2(6e - 6e + 2e^2) = \frac{1}{3}\pi(4)(2e^2) = \frac{8}{3}\pi e^2$$

$$V(solido\ rotazione) = 8\pi(3e - e^2) + \frac{8}{3}\pi e^2 = \frac{8}{3}\pi(9e - 2e^2) \cong 81.149\ u^3$$

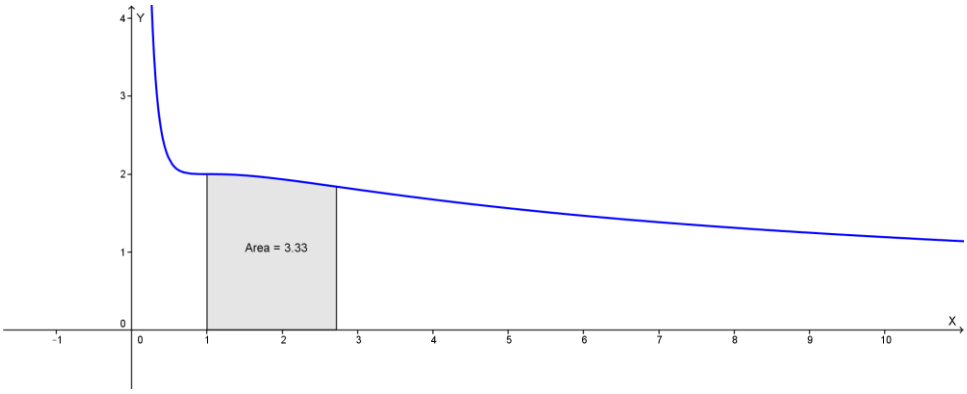
4)

Si calcoli l'area della regione di piano, limitata dalla curva γ dall'asse delle x e dalle rette x=1, x= e.

L'area si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area = \int_1^e \frac{\ln^2 x + 2lnx + 2}{x}\, dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x}\ln^2 x + \frac{2}{x}lnx + \frac{2}{x}\right) dx = \left[\frac{1}{3}\ln^3 x + \ln^2 x + 2\ln|x|\right]_1^e =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + 2 = \frac{10}{3}\ \ u^2 \cong 3.33\ \ u^2$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria