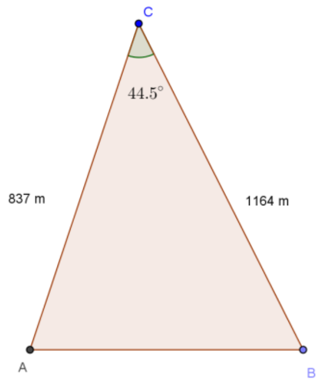
PNI 2012 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Alcuni ingegneri si propongono di costruire una galleria rettilinea che colleghi il paese A, situato su un versante di una collina, col paese B, che si trova sul versante opposto. Da una terza località C i progettisti misurano le distanze CA=837 metri, CB=1164 metri e l'angolo ACB la cui ampiezza è 44,5°. Si calcoli quale sarà la lunghezza della galleria.



Basta applicare il teorema del coseno:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(44.5°) = [837^2 + 1164^2 - 2 \cdot 837 \cdot 1164 \cdot \cos(44.5°)]\, m$$

$AB^2 = 665670.82\ \text{m}^2$, $AB \cong 816\, m$.

QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $\frac{1}{1-cosx} - \frac{2}{x^2}$ *quando x tende a 0.*

Il limite si presenta nella forma indeterminata $[+\infty - \infty]$.

$$\frac{1}{1-cosx} - \frac{2}{x^2} = \frac{1+cosx}{sen^2x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + x^2cosx - 2sen^2x}{x^2sen^2x}$$

Si potrebbe applicare (più volte) la regola di de L'Hőpital ma preferiamo proporre una soluzione che utilizzi gli sviluppi di Taylor, ricordando che, se x tende a 0, risulta:

$cosx = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad , \quad senx = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Quindi:

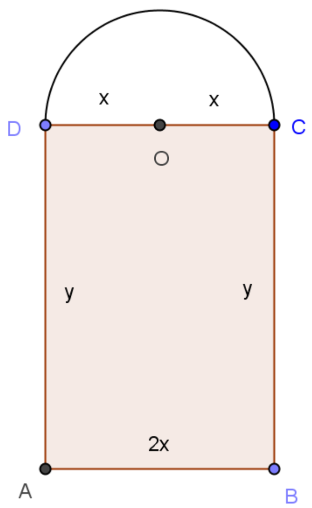
$$\frac{x^2 + x^2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad\right) - 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2}{x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - 2\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \sim \frac{\frac{1}{6}x^4}{x^4} = \frac{1}{6}$$

Il limite richiesto è quindi $\frac{1}{6}$.

QUESITO 3

Una finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un semicerchio avente per diametro un lato del rettangolo; il contorno della finestra misura L. Si determinino le dimensioni del rettangolo affinché l'area totale della finestra sia massima.



Indicato con 2x il lato del rettangolo che coincide con il diametro della semicirconferenza e con y la misura dell'altro lato del rettangolo, osservando che il contorno della finestra è formato dai lati AD, AB e BC del rettangolo e dalla semicirconferenza di diametro CD (senza diametro), si ha:

$$2x + 2y + \pi x = L$$

Da cui: $y = \frac{L}{2} - x - \frac{\pi x}{2}$

L'area della finestra è data da:

$$Area(finestra) = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2 = 2x\left(\frac{L}{2} - x - \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$Area = xL - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2 = \left(-2 - \frac{1}{2}\pi\right)x^2 + xL = z$

La funzione da ottimizzare è una parabola con la concavità rivolta verso il basso, quindi il massimo si ha nel vertice (se inclusso nelle limitazioni della x):

$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{L}{4+\pi} < L \;\; quindi\ accettabile$. L'area massima risulta:

$$Area(massima) = \left(-2-\frac{1}{2}\pi\right)\left(\frac{L}{4+\pi}\right)^2 + \frac{L^2}{4+\pi} = -\frac{1}{2}(4+\pi)\frac{L^2}{(4+\pi)^2} + \frac{L^2}{4+\pi} = \frac{L^2}{2(4+\pi)}$$

QUESITO 4

Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione: $f(x) = \log_x(x^2+4)$ *nel punto P di ascissa x=2.*

Osserviamo che la funzione è definita per x>0 e x diverso da 1. Trasformiamo il logaritmo in logaritmo naturale:

$$f(x) = \log_x(x^2+4) = \frac{\ln(x^2+4)}{\ln(x)}, \quad f(2) = \frac{ln8}{ln2} = \frac{3\ln(2)}{\ln(2)} = 3$$

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+4}\cdot\ln(x) - \frac{1}{x}\cdot\ln(x^2+4)}{\ln^2(x)}, \quad f'(2) = \frac{\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(8)}{\ln^2(2)} = \frac{\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(2)}{\ln^2(2)} =$$

$$= \frac{-\ln(2)}{\ln^2(2)} = -\frac{1}{\ln(2)} = m$$

Quindi la tangente ha equazione:

$$y - 3 = -\frac{1}{\ln(2)}(x-2), \quad y = -\frac{1}{\ln(2)}x + \frac{2}{\ln(2)} + 3$$

QUESITO 5

La superficie piana S, delimitata dalla curva γ *di equazione* $y = x^2\sqrt{x+1}$ *e dall'asse x nell'intervallo* $-1 \le x \le 0$, *è la base di un solido* Σ, *le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di* Σ.

Osserviamo che la funzione nell'intervallo indicato non è mai negativa, in particolare si annulla agli estremi dell'intervallo. Il volume richiesto si ottiene mediante il seguente integrale (a e b sono gli estremi dell'intervallo, A(x) è l'area della sezione, che nel nostro caso è un quadrato di lato y:

$$\int_a^b A(x)dx = \int_{-1}^0 \left(x^2\sqrt{x+1}\right)^2 dx = \int_{-1}^0 (x^5+x^4)dx = \left[\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{30}\ u^3$$

QUESITO 6

Si dimostri che $\int_1^2 \frac{x}{x-1}\,dx = +\infty$.

$$\int_1^2 \frac{x}{x-1}\,dx = \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{x}{x-1}\,dx = \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{x-1+1}{x-1}\,dx = \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= \lim_{a\to 1^+}[x+\ln|x-1|]_a^2 = \lim_{a\to 1^+}[2-(a+\ln(a-1))] = \lim_{a\to 1^+}[2-a-\ln(a-1)] = +\infty$$

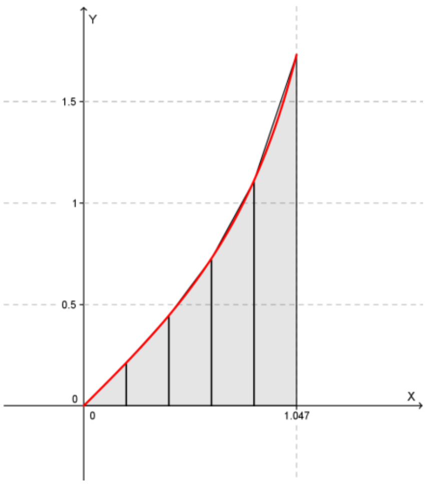
(se $a \to 1^+$ $\ln(a-1) \to -\infty$).

QUESITO 7

Tenuto conto che: $\log 2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} tg\, x\, dx$

si calcoli un'approssimazione di $log 2$*, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.*

Utilizziamo il metodo dei trapezi dividendo l'intervallo in n=5 parti:



$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg\, x\, dx \cong h\left[\frac{f(x_0)+f(x_5)}{2} + f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\right]$$

Dove: $h = \frac{\frac{\pi}{3}-0}{5} = \frac{\pi}{15}$ $\quad x_0 = 0,\ x_1 = 0+h = \frac{\pi}{15},\ x_2 = \frac{2\pi}{15},\ x_3 = \frac{3\pi}{15},\ x_4 = \frac{4\pi}{15},\ x_5 = \frac{5\pi}{15} = \frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg\,x\,dx \cong \frac{\pi}{15}\cdot\left[\frac{f(0)+f(\frac{\pi}{3})}{2}+f\left(\frac{\pi}{15}\right)+f\left(\frac{2\pi}{15}\right)+f\left(\frac{3\pi}{15}\right)+f(\frac{4\pi}{15})\right]=$$

$$=\frac{\pi}{15}\cdot\left[\frac{0+\sqrt{3}}{2}+0.213+0.455+0.727+1.111\right]\cong\frac{\pi}{15}\cdot 3.372\cong 0.71$$

Le prime cifre esatte di ln(2) sono: 0.693.

QUESITO 8

Si determini per quale valore di x si ha $e^{10^x}=10^{e^x}$.

Passando ai logaritmi abbiamo:

$$ln\left(e^{10^x}\right)=ln\left(10^{e^x}\right),\quad 10^x=e^x ln10\,,\qquad \left(\frac{10}{e}\right)^x=ln10\,,\quad xln\left(\frac{10}{e}\right)=\ln(ln10),$$

$$x=\frac{\ln(ln10)}{ln\left(\frac{10}{e}\right)}=\frac{\ln(ln10)}{ln10-1}=x$$

QUESITO 9

Si determini la probabilità che in otto lanci di una moneta si presenti croce un numero dispari di volte.

La probabilità che esca croce in 1 lancio e $p=\frac{1}{2}$. Dobbia calcolare la probabilità che esca croce 1 volta oppure 3 volte oppure 5 volte oppure 7 volte in otto lanci. Applichiamo la formula della distribuzione binomiale con n=8 ed x (i successi) uguale ad 1, 3, 5, 7.

$p(n,x)=\binom{n}{x}p^x\cdot q^{n-x}$, con p=q=1/2

$$p(8,1)=\binom{8}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8,\qquad p(8,3)=\binom{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=56\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$p(8,5)=\binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=56\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8,\qquad p(8,7)=\binom{8}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

La probabilità richiesta è quindi:

$$\left[8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8+56\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]\cdot 2=64\cdot\frac{1}{256}\cdot 2=\frac{1}{2}$$

QUESITO 10

In una figliata di quattro gattini, è più probabile che due siano maschi e due siano femmine, oppure che tre siano di un sesso e uno dell'altro?

I casi possibili con quattro gattini sono $2^4=16$ che sono le disposizioni con ripetizione di due oggetti (M ed F) a 4 a 4.

I casi con due maschi e due femmine sono:

M1M2, M1M3, M1M4, M2M3, M2M4,M3M4: 6 casi possibili.

La probabilità di avere due maschi e due femmine è quindi:

$$p(2M2F)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

Contiamo i casi in cui si hanno tre gattini di un sesso e uno dell’altro.

I casi in cui si hanno 3 maschi sono 4, infatti può essere femmina il primo, il secondo, il terzo o il quarto gattino e gli altri tre in ogni caso maschi. Analogamente si hanno 4 casi con 3 femmine. In totale abbiamo 8 casi . Pertanto:

$$p(3\ di\ un\ sesso\ e\ uno\ dell'altro)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria