Sessione straordinaria 2012 Y557.2.1/1
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il triangolo ABC, rettangolo in A, ha l'ipotenusa $BC = 2a$; sia P il punto medio di AC, Q la sua proiezione ortogonale su BC e $A\hat{B}C = \alpha$.

1. Si calcoli il rapporto:

$$\frac{PQ + QC}{BQ}$$

e lo si esprima in funzione di $x = \text{tg}\alpha$, controllando che risulti:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 2}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si determinino le coordinate del punto D $(x_D ; y_D)$ in cui la curva γ incontra il suo asintoto e si scrivano le equazioni della tangente e della normale in tale punto.
4. Si determini l'area della superficie piana, appartenente al I quadrante, delimitata dall'asse delle ascisse, dalla curva γ e dalla retta $x = x_D$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{3x + 2}{\sqrt{x - 5}}.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo φ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x.
3. Si calcoli il volume del solido Ω, generato dalla superficie piana Σ, delimitata dalla curva γ, dall'asse delle x e dalle rette $x = 6$ e $x = 10$, in una rotazione completa attorno all'asse x.
4. Se tutte le misure fossero espresse in dm, potrebbe un recipiente, avente la stessa capacità del solido Ω, contenere 3 m^3 di acqua?

Sessione straordinaria 2012 Y557.2.1/1
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Alcuni ingegneri si propongono di costruire una galleria rettilinea che colleghi il paese A, situato su un versante di una collina, col paese B, che si trova sul versante opposto. Da una terza località C i progettisti misurano le distanze $CA = 837\ metri$, $CB = 1164\ metri$ e l'angolo $A\hat{C}B$ la cui ampiezza è 44,5°. Si calcoli quale sarà la lunghezza della galleria.
2. Si calcoli il limite della funzione $\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}$, quando x tende a 0.
3. Una finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un semicerchio avente per diametro un lato del rettangolo; il contorno della finestra misura l. Si determinino le dimensioni del rettangolo affinché l'area totale della finestra sia massima.
4. Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$f(x) = \log_x (x^2 + 4)$$

nel punto P di ascissa $x = 2$.

5. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = x^2\sqrt{x+1}$ e dall'asse x nell'intervallo $-1 \le x \le 0$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di Σ.
6. Sia data la funzione: $f(x) = \begin{cases} 1-x & per \quad -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{xsenx} & per \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$

Si dica se essa è continua nel punto $x = 0$.

7. Si determini il campo di esistenza della funzione: $y = \log\frac{8-x}{3x+2} + \sqrt{5+4x-x^2}$
8. Un tetraedro regolare di rame (densità ρ = 8,9 g/cm^3), avente lo spigolo l = 6cm, presenta all'interno una cavità di forma sferica. Sapendo che la massa del tetraedro è m = 200 g, si calcoli la lunghezza del raggio della cavità.
9. Si calcoli il valore medio della funzione: $y = \frac{x^5-1}{x^2+1}$, nell'intervallo $0 \le x \le 1$.
10. Si dimostri che il teorema di Pitagora è un caso particolare del teorema di Carnot.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.