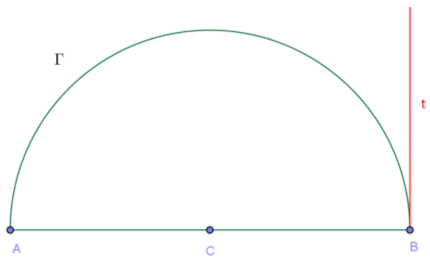
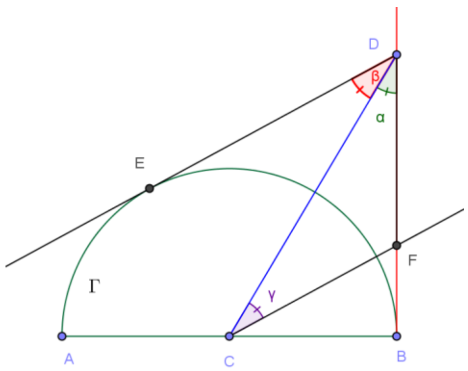
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2013 - PROBLEMA 1

E' data la semicirconferenza Γ di centro C e diametro AB=2. Sia t la semiretta tangente a Γ in B e giacente nello stesso semipiano di Γ rispetto ad AB.



1)

Da un punto D di t, distinto da B, si conduca l'altra tangente a Γ e si indichi con E il punto di tangenza. Dal centro C si conduca una semiretta parallela a DE che tagli t in F. Si provi che il triangolo FDC è isoscele.

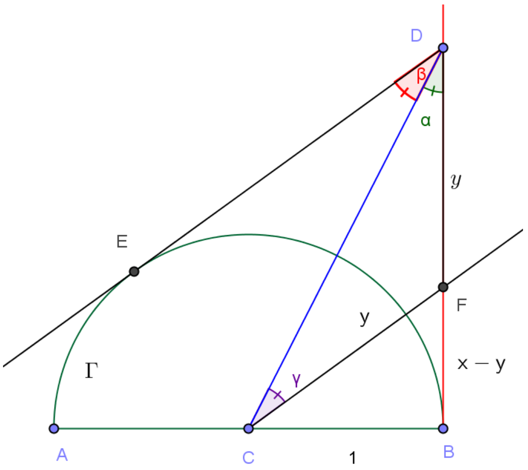


Poiché DB e DE sono le tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza, per una nota proprietà CD è bisettrice dell'angolo BDE, quindi $\alpha = \beta$.
Essendo poi DE e CF parallele, risulta $\beta = \gamma$, perché alterni interni formati con la trasversale CD.
Ne consegue che $\alpha = \gamma$: il triangolo CDF è allora isoscele sulla base CD.

2)

Posto $x = \overline{DB}$ e $y = \overline{DF}$ si provi che $y = \frac{x^2+1}{2x}$. Si determini l'intervallo in cui può variare x e, in corrispondenza, quello in cui varia y.

$x = \overline{DB}$: notiamo che quando x=R=1 il punto F coincide con B; pertanto non può essere x<1 altrimenti F non apparterrebbe più alla semiretta t. Risulta quindi $\mathbf{1 \leq x < +\infty}$.
$y = \overline{DF}$: DF non supera mai DB ma può essere qualsiasi $\boldsymbol{y \geq 1}$ (in particolare risulta y=1 quando x=1, cioè quando F coincide con B).
Calcoliamo ora y in funzione di x.



Per il teorema di Pitagora risulta:

$y^2 = (x-y)^2 + 1$, da cui: $2xy = 1 + x^2$, quindi:

$$y = f(x) = \frac{x^2+1}{2x}, \qquad c.v.d.$$

3)

Si tracci il grafico Φ della y=f(x), senza tener conto dei limiti posti dal problema geometrico, e si indichi con s il suo asintoto obliquo.

$$y = f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$$

N.B. La funzione può essere ricondotta alla forma $\boldsymbol{x^2 - 2xy + 1 = 0}$, quindi si tratta di una conica, in particolare di un'iperbole.

Dominio: $-\infty < x < 0,\ 0 < x < +\infty$.

Eventuali simmetrie notevoli: poiché $f(-x) = -f(x)$ la funzione è dispari, quindi il suo grafico Φ è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Intersezioni con gli assi:

x=0, impossibile (l'asse delle y non viene intersecato)
y=0, segue $x^2 + 1 = 0$ che è impossibile (neanche l'asse x viene intersecato).

Segno della funzione:

y>0 se x>0, y<0 se x<0 (il grafico è quindi nel primo e terzo quadrante).

Limiti:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{2x} = +\infty$ (quindi $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{2x} = -\infty$): x=0 è asintoto verticale.

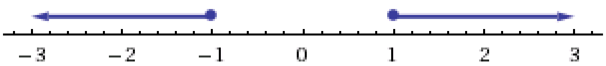
$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{2x} = +\infty$ (quindi $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{2x} = -\infty$): può esserci asintoto obliquo, che effettivamente c'è, poiché si tratta di una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore. Poiché la funzione puà essere scritta nella forma:

$$y = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\,, \qquad con\ \frac{1}{2x}\ infinitesimo\ per\ x \longrightarrow \pm\infty$$

l'asintoto obliquo ha equazione $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x} \quad \boldsymbol{(s)}$**.**

Derivata prima:

$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2-1}{2x^2} \geq 0 \quad se \quad x \leq -1\ \ vel\ \ x \geq 1$, dove la funzione è crescente.

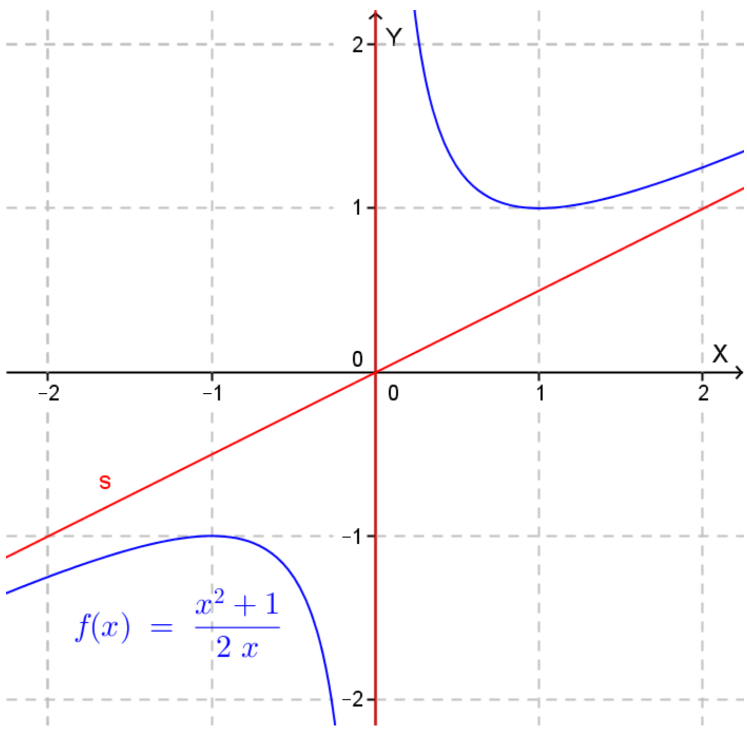


Abbiamo quindi un punto di massimo in $x = -1$ ed un punto di minimo in $x = 1$ (che valgono rispettivamente $f(-1) = -1, \quad f(1) = 1$.

Derivata seconda:

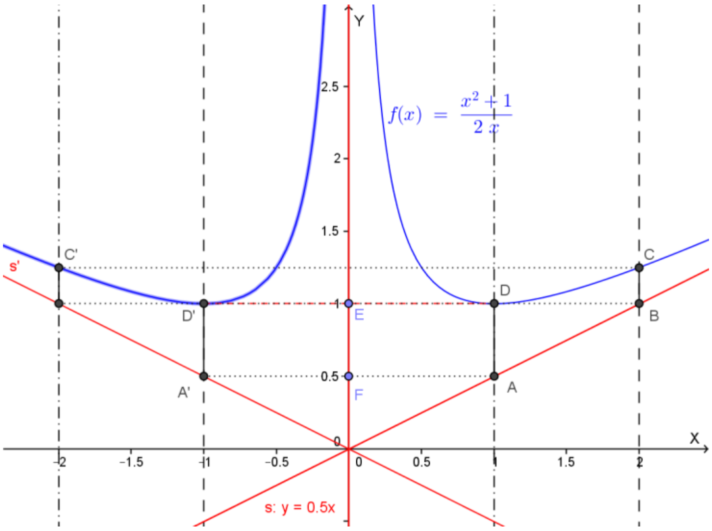
$y'' = \frac{1}{x^3} > 0\ per\ x > 0$: quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se x>0 e verso il basso se x<0.

Grafico della funzione:



4)

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della regione di piano delimitata da Φ, da s e dalle rette x=1 e x=2.



Dobbiamo determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della regione ABCD.
Il metodo più opportuno ci sembra quello dei gusci cilindrici (v. approfondimento).
Ponendo:
$f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ e $g(x) = \frac{1}{2}x$ il volume richiesto è dato da:

$$V = 2\pi \int_1^2 x(f(x) - g(x))dx = 2\pi \int_1^2 x\left(\frac{x^2+1}{2x} - \frac{1}{2}x\right)dx = 2\pi \int_1^2 x\left(\frac{1}{2x}\right)dx =$$

$$= 2\pi \int_1^2 \frac{1}{2}dx = \pi \int_1^2 dx = \pi[x]_1^2 = \pi$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri