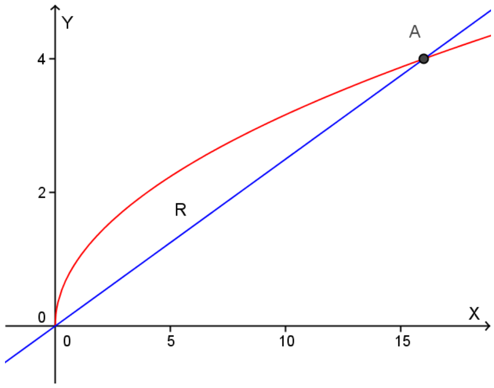
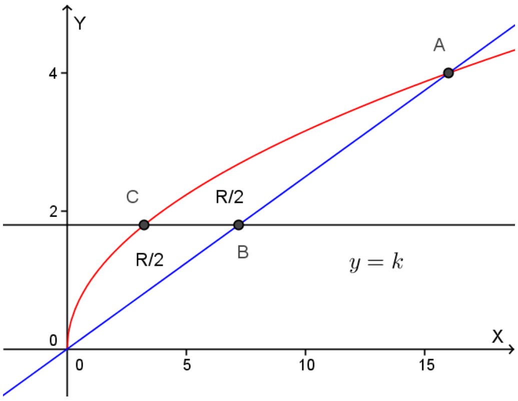
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2013 - PROBLEMA 2

Sia R la regione del primo quadrante degli assi cartesiani delimitata da $y = \sqrt{x}$ *e da* $y = \frac{x}{4}$



1)

Si determini la retta y=k che dimezza l'area di R.



Le due curve possono essere scritte nella forma:

$x = y^2 \ \ (con\ y > 0)$ e $x = 4y$. Le loro intersezioni si ottengono ponendo $y^2 = 4y$
Da cui y=0 e y=4 (quindi deve essere 0<k<4)

Le due regioni hanno la stessa area se:

$\int_0^k (4y - y^2)dy = \int_k^4 (4y - y^2)dy \quad \Rightarrow \quad \left[2y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^k = \left[2y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_k^4$ da cui:

$2k^2 - \frac{1}{3}k^3 = 32 - \frac{64}{3} - \left(2k^2 - \frac{1}{3}k^3\right), \quad 4k^2 - \frac{2}{3}k^3 - \frac{32}{3} = 0\,, \quad 2k^3 - 12k^2 + 32 = 0,$

$k^3 - 6k^2 + 16 = 0$

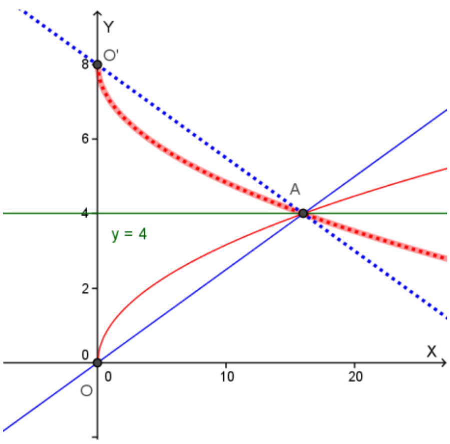
L'equazione ha come radice k=2 e, abbassandola di grado con la regola di Ruffini, è equivalente a:

$(k-2)(k^2 - 4k - 8) = 0$, che, oltre a k=2, ammette le radici $k = 2 \pm 2\sqrt{3}$ (che non sono accettabili).

Quindi le due aree sono uguali se $k = 2$.

2)

Si disegni la regione piana simmetrica di R rispetto alla retta y=4, e si scrivano le equazioni delle curve che la delimitano.



Le equazioni della simmetria rispetto alla retta di equazione y=4 sono:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = 8 - y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = X \\ y = 8 - Y \end{cases}$$

Quindi le equazioni delle curve che delimitano la nuova regione sono:

$$y = \frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad 8 - Y = \frac{X}{4} \quad \Rightarrow \quad Y = -\frac{1}{4}X + 8$$

$$y = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad 8 - Y = \sqrt{X} \quad \Rightarrow \quad Y = -\sqrt{X} + 8$$

3)

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione di R attorno alla retta y=4.

Effettuiamo una traslazione di assi in modo che la retta y=4 diventi l'asse delle x:

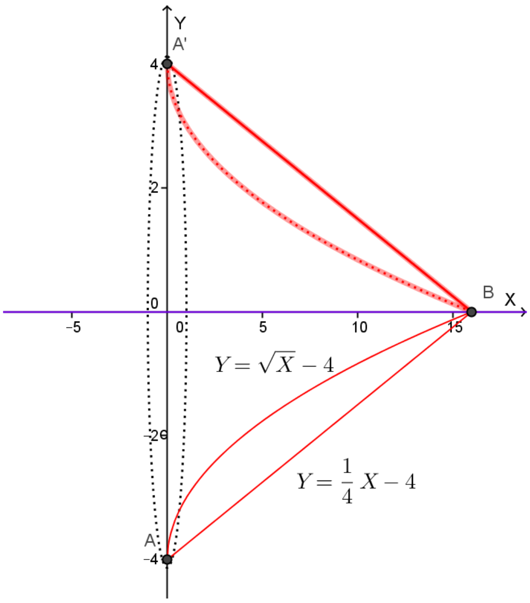
$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = X \\ y = Y + 4 \end{cases}$$

Le equazioni delle curve $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{x}{4}$ che delimitano R si trasformano in :

$$y = \frac{x}{4} \quad \Longrightarrow \quad Y + 4 = \frac{X}{4} \quad \Longrightarrow \quad Y = \frac{1}{4}X - 4$$

$$y = \sqrt{x} \quad \Longrightarrow \quad Y + 4 = \sqrt{X} \quad \Longrightarrow \quad Y = \sqrt{X} - 4$$

Il volume V richiesto si ottiene quindi calcolando il seguente integrale:



$$V = \pi \int_0^{16} \left[\left(\frac{1}{4}X - 4 \right)^2 - \left(\sqrt{X} - 4 \right)^2 \right] dX =$$

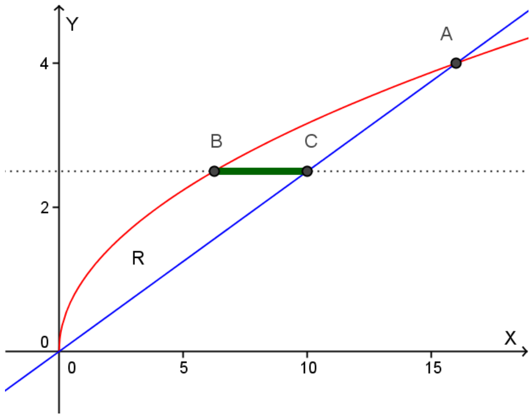
$$= \frac{\pi}{16} \int_0^{16} \left[X^2 - 48X + 128\sqrt{X} \right] dX =$$

$$= \frac{\pi}{16} \left[\frac{1}{3}X^3 - 24X^2 + \frac{256}{3} X\sqrt{X} \right]_0^{16} =$$

$$= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{2048}{3} = \frac{128}{3}\pi = V$$

4)

R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse y sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.



Il volume del solido W si ottiene calcolando il seguente integrale:

$V(W) = \int_0^4 S(y)dy$ essendo $S(y)$ l'area del quadrato di lato BC; risulta:

$S(y) = \overline{BC}^2 = (x_C - x_B)^2 = (4y - y^2)^2 = 16y^2 - 8y^3 + y^4$ quindi

$$V(W) = \int_0^4 S(y)dy = \int_0^4 (16y^2 - 8y^3 + y^4)dy = \left[\frac{16}{3}y^3 - 2y^4 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^4 = \frac{512}{15} \cong 34.133\, u^3$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri