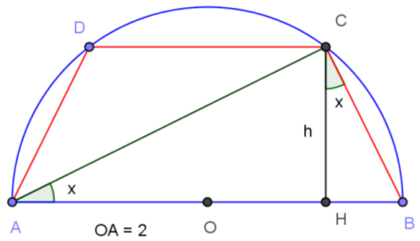
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2013

QUESITO 1

Un trapezio è inscritto in un semicerchio di raggio 2 con una base coincidente con il diametro del cerchio. Si trovi l'area massima del trapezio.



Indicato con x l'angolo BAC (con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$), che è uguale all'angolo BCH, si ha:

$BC = 4senx,\qquad BH = BC\ senx = 4sen^2x,\qquad CD = AB - 2BH = 4 - 8sen^2x,$

$CH = h = BCcosx = 4senxcosx$

L'area del trapezio è data da:

$$Area(ABCD) = \frac{(AB + CD)\cdot h}{2} = \frac{(4 + 4 - 8sen^2x)\cdot(4senxcosx)}{2} = 16senxcos^2x$$

L'area del trapezio è massima se è massima:

$$\begin{cases} y = f(x) = senxcos^2x = senx(1 - sen^2x) \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Siccome la funzione è continua (e derivabile) in un intervallo chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto, che sono da ricercarsi tra i valori agli estremi e i valori in cui si annulla la derivata prima.

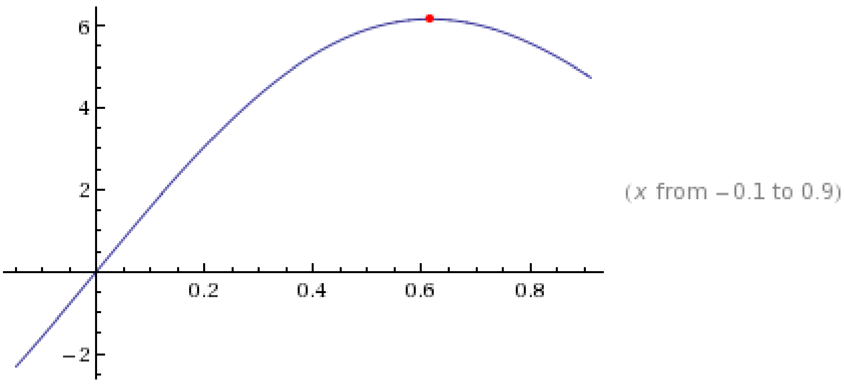
$$y' = cos^3x - 2\,sen^2x\,cosx = cosx(\cos^2 x - 2sen^2x) = cosx(1 - 3sen^2x) = 0\ se:$$

$cosx = 0: mai\ in\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ oppure $1 - 3sen^2x = 0\ \ da\ cui\ \ senx = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ di cui è accettabile solo il valore positivo. Quindi il massimo richiesto si ha per $x = 0, x = \frac{\pi}{4}\ \ oppure\ per\ x = sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Risulta:

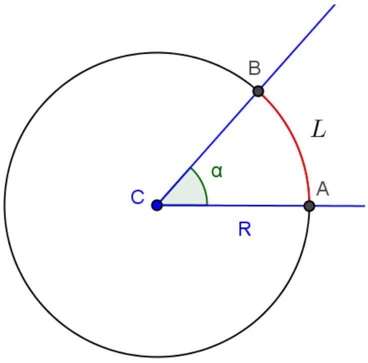
$f(0) = 0,\ \ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = 4\sqrt{2},\quad f\left(sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{32}{9}\cdot\sqrt{3}$

Di questi il valore più grande è $\mathbf{\frac{32}{9}\cdot\sqrt{3} \cong 6.16}$, che quindi è il massimo richiesto, ottenuto per $x = sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cong 0.62\ rad.$



QUESITO 2

In un libro si legge: "La definizione classica di misura di un angolo per mezzo della lunghezza di un arco di cerchio è essenzialmente corretta". Si spieghi, eventualmente con qualche esempio, il significato di tale affermazione.



Si tratta della definizione di misura in **radianti** di un angolo. Si consideri la generica circonferenza di raggio R con centro nel vertice C dell'angolo e si indichi con L la lunghezza dell'arco rettificato AB individuato dalle intersezioni dei lati dell'angolo con la circonferenza. Si definisce misura in radianti dell'angolo α il rapporto tra la lunghezza L dell'arco ed il raggio R: $\alpha = \frac{L}{R}$. Si noti che tale rapporto non dipende dalla circonferenza scelta, poiché al variare di R il rapporto tra L ed R è costante, dipende quindi solo da α; tale rapporto può essere quindi assunto come misura dell'angolo.

Se prendiamo R=1, la misura dell'angolo è individuata dalla lunghezza L dell'arco.

Ad esempio, se α rappresenta un angolo retto, la sua misura in radianti è data da:

$$\alpha = \frac{L}{R} = \frac{\frac{1}{4} Circonferenza}{R} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 2\pi R}{R} = \frac{\pi}{2}$$

Notiamo che $\frac{\pi}{2}$ è la lunghezza dell'arco AB, quarta parte della circonferenza di raggio 1.

QUESITO 3

Tommaso ha costruito un modello di tetraedro regolare e vuole colorare le 4 facce, ognuna con un colore diverso. In quanti modi può farlo se ha a disposizione 9 colori? E se invece si fosse trattato di un cubo?

Il numero dei modi con cui si possono colorare le 4 facce di un tetraedro regolare ognuna con colori diversi, avendo a disposizione 9 colori è dato dalle combinazioni senza ripetizione, di 9 oggetti a 4 a 4, cioè:

$$\boldsymbol{C_{9,4}} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 7\cdot 2\cdot 9 = \mathbf{126}$$

Il numero dei modi con cui si possono colorare le 6 facce di un cubo (esaedro regolare) ognuna con colori diversi, avendo a disposizione 9 colori è dato dalle combinazioni senza ripetizione, di 9 oggetti a 6 a 6, cioè:

$$\boldsymbol{C_{9,6}} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!\,(9-6)!} = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 7\cdot 4\cdot 3 = \mathbf{84}$$

QUESITO 4

Si provi che l'equazione $x^4+4x^3+6x^2-1=0$ *ammette nell'intervallo* $[0,1]$ *un'unica soluzione.*

Consideriamo la funzione di equazione $f(x)=x^4+4x^3+6x^2-1$; essa è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,1]$ (essendo una funzione razionale intera è continua su tutto l'asse reale). Calcoliamo i valori assunti agli estremi di tale intervallo:

$$f(0)=-1<0\ ,\quad f(1)=10>0$$

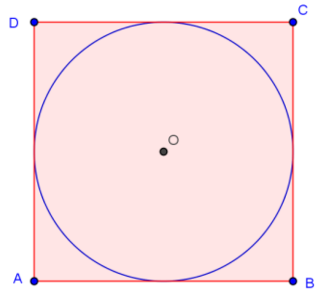
Per il **teorema degli zeri** la funzione ammette quindi almeno uno zero interno all'intervallo dato.
Analizziamo la derivata prima della funzione nell'intervallo $(0,1)$.

$f(x)=4x^3+12x^2+12x>0 \quad \Longrightarrow \quad 4x(x^2+3x+3)>0$ per ogni x di $(0,1)$.

Quindi la funzione nell'intervallo $(0,1)$ è sempre crescente, pertanto si annulla una sola volta in tale intervallo; ciò dimostra che l'equazione $\mathrm{x}^4+4\mathrm{x}^3+6\mathrm{x}^2-1=0$ ammette nell'intervallo $[0,1]$ un'unica soluzione.

QUESITO 5

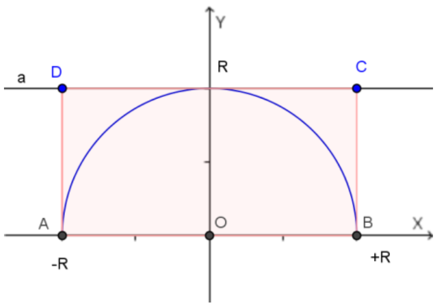
Il volume di una sfera è pari ai 2/3 del cilindro ad essa circoscritto. E' questo uno dei risultati più noti che si attribuisce ad Archimede tant'è che una sfera e un cilindro furono scolpiti sulla sua tomba. Si ritrovi tale risultato mediante l'applicazione del calcolo integrale.



Osserviamo che, detto R il raggio della sfera, risulta:

$$V(scilindro\ cirscoscritto) = \pi R^2 \cdot h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$
$$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}(2\pi R^3) = \frac{2}{3}\ V(scilindro\ cirscoscritto)$$

Dimostriamo tale relazione mediante il calcolo integrale.
Per far ciò notiamo che la sfera ed il cilindro ad essa circoscritto si possono vedere come i solidi ottenuti dalla rotazione attorno all'asse x di un rettangolo e di un semicerchio.



$$\boldsymbol{V(scilindro)} = 2\left(\pi\int_0^R f^2(x)dx\right) = 2\pi\int_0^R R^2 dx = 2\pi[r^2x]_0^R = \boldsymbol{2\pi R^3}$$

$$\boldsymbol{V(sfera)} = 2\left(\pi\int_0^R f^2(x)dx\right) = 2\pi\int_0^R y^2dx = 2\pi\int_0^R y^2dx = 2\pi\int_0^R (R^2 - x^2)dx =$$
$$= 2\pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = 2\pi\left[R^3 - \frac{R^3}{3}\right] = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Quindi, come verificato sopra:

$$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}(2\pi R^3) = \frac{2}{3}\ V(scilindro\ cirscoscritto)$$

QUESITO 6

Un cono rotondo ha altezza h = 7 dm e raggio r = 4 dm. Si vuole diminuire la prima di quanto si aumenta il secondo in modo che il volume del cono aumenti del 25 %. Si dica se la questione ammette soluzioni e, in caso affermativo, si dica quali sono.

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $V_2 = \frac{1}{3}\pi (r+x)^2(h-x) = 1.25\, V_1$, con $0<x<7$

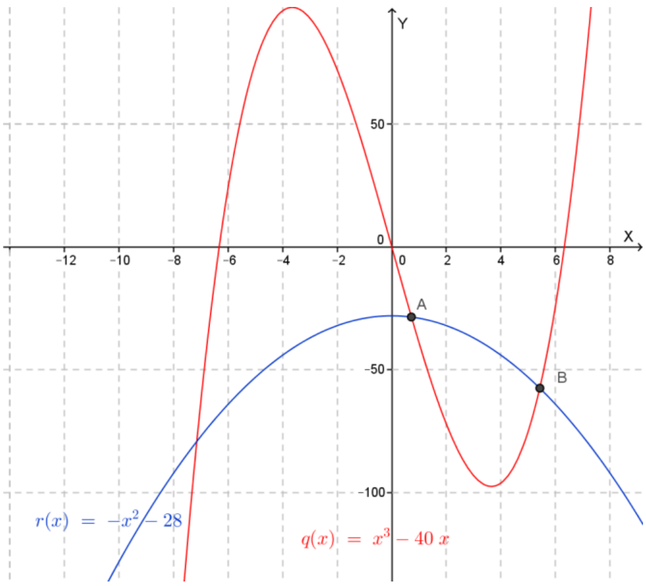
$\frac{1}{3}\pi (r+x)^2(h-x) = 1.25 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h \implies (4+x)^2(7-x) = \frac{125}{100} \cdot 16 \cdot 7 = 140$

Eseguendo i calcoli si arriva all'equazione:

$-x^3 - x^2 + 40x + 112 = 140 \implies \boldsymbol{x^3 + x^2 - 40x + 28 = 0}$

Le soluzioni di questa equazioni equivalgono alle ascisse dei punti di intersezione tra le curve di equazione:

$y = x^3 - 40x, \quad y = -x^2 - 28$



Abbiamo due soluzioni, una compresa tra 0 ed 1 e l'altra compresa tra 5 e 6; più precisamente:

$$\boldsymbol{x_1 \cong 0.7 \quad e \quad x_2 \cong 5.4}$$

QUESITO 7

Data la funzione definita da:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & se\ \ x<2 \\ bx+c & se\ \ x\geq 2 \end{cases}$$

Si determini la terna ordinata (a,b,c) in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:
a) f(x) è continua
b) f(3) = 20
c) $\lim_{x\to -2} f(x)=0$

a) f(x) è continua se $\lim_{x\to 2^-}(ax^2+bx)=\lim_{x\to 2^+}(bx+c)=f(2)$, quindi se:

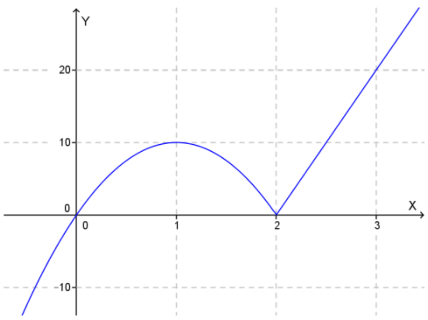
$$4a+2b=2b+c \quad \Rightarrow \quad c=4a$$

b) f(3)=20, se $3b+c=20 \quad \Rightarrow \quad 3\,b=20-4a$

c) $\lim_{x\to -2} f(x)=0$ se $4a+2b=0 \quad \Rightarrow \quad b=-2a$

Mettendo a sistema le tre condizioni si ottiene:

$$\begin{cases} c=4a \\ 3b=20-4a \\ b=-2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=4a \\ -6a=20-4a \Rightarrow a=-10 \\ b=-2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=20 \\ c=-40 \end{cases}$$



$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} -10x^2+20x & se\ \ x<2 \\ 20x-40 & se\ \ x\geq 2 \end{cases}}$$

QUESITO 8

Si verifichi l'identità: $tg(45°+\alpha)=\frac{1+sen2\alpha}{cos2\alpha}$

Risulta:

$$\boldsymbol{tg(45°+\alpha)}=\frac{tg45°+tg\alpha}{1-tg45°tg\alpha}=\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}=\frac{1+\frac{sen\alpha}{cos\alpha}}{1-\frac{sen\alpha}{cos\alpha}}=\frac{cos\alpha+sen\alpha}{cos\alpha-sen\alpha}=\frac{(cos\alpha+sen\alpha)^2}{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha+sen^2\alpha+2cos\alpha\ sen\alpha}{\cos 2\alpha}=\boldsymbol{\frac{1+\mathrm{sen}\,2\alpha}{\cos 2\alpha}}$$