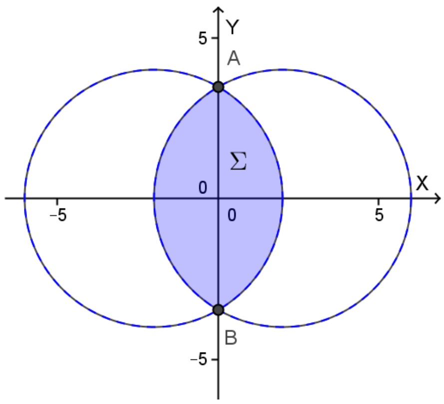
Scuole italiane all'estero (Europa) 2013 - PROBLEMA 1

In un riferimento cartesiano Oxy siano C_1 e C_2 le circonferenze di equazioni

$$x^2 + y^2 + 4x = 12 \qquad e \qquad x^2 + y^2 - 4x = 12$$

1)

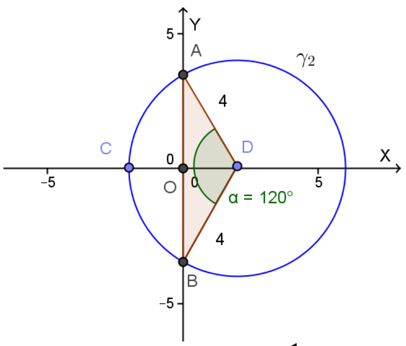
Si determinino le coordinate dei punti A e B comuni alle due circonferenze e si calcoli l'area della regione di piano Σ comune ai due cerchi.



Cerchiamo le coordinate delle intersezioni A e B tra le due circonferenze.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 12 \\ x^2 + y^2 - 4x = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 2\sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases}$$ quindi:

$A = (0; 2\sqrt{3}) \quad e \quad A = (0; -2\sqrt{3})$



L'area di Σ è il doppio dell'area del segmento circolare ACBO, il cui valore si ottiene sottraendo all'area del settore circolare ADB l'area del triangolo ABD.
Siccome AC è uguale a 4 (è il raggio della circonferenza di sinistra), il triangolo ACD è equilatero, quindi l'angolo ADC misura 60°, e perciò l'angolo ADB misura 120°.
Il settore circolare ADB è quindi 1/3 del cerchio, perciò la sua area è:

$$A(settore\ ADBC) = \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{16}{3}\pi$$

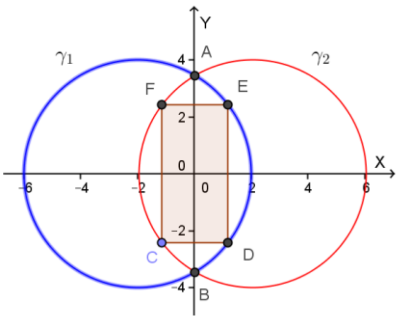
$$A(triangolo\ ABD) = \frac{4 \cdot 4 \cdot sen120°}{2} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Quindi l'area del segmento circolare ACBO è uguale a:

$$A(segm.\ circ.\ ACBO) = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3} \implies A(\Sigma) = 2 \cdot \left(\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right) = 8 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) \cong 19.65\ u^2$$

2)

Fra tutti i rettangoli inscritti in Σ e aventi i lati paralleli agli assi cartesiani, si determini quello di perimetro massimo.



Il generico vertice E del rettangolo CDEF ha coordinate $E = (x; y)$, con $0 \leq x \leq 2$, $y \geq 0$ ed appartiene a γ_1 , quindi le sue coordinate soddisfano l'equazione della circonferenza γ_1 che è: $x^2 + y^2 + 4x = 12$.

Risulta: $2p(CDEF) = 4x + 4y = max$

Da $x^2 + y^2 + 4x = 12$ ricaviamo $y = \sqrt{16 - (x + 2)^2} = \sqrt{12 - x^2 - 4x}$

Il perimetro è massimo se è massima l'espressione $z = x + y = x + \sqrt{12 - x^2 - 4x}$

$$\begin{cases} z = x + y = x + \sqrt{12 - x^2 - 4x} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{12 - x^2 - 4x}\right) = \frac{-x-2}{\sqrt{-x^2 - 4x + 12}} + 1$$

$z' > 0$ se:

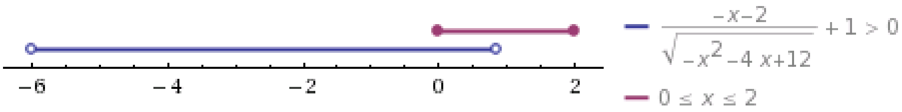
$$\frac{\sqrt{-x^2 + 4x - 12} - x - 2}{\sqrt{-x^2 + 4x - 12}} > 0$$

Verificata se:

$$-6 < x < 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

E tenendo presente che $0 \leq x \leq 2$ abbiamo:

$0 \leq x < 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$



Quindi z è crescente in

$0 \leq x < 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$

e decrescente in

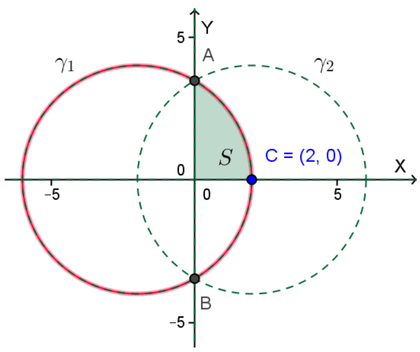
$2\left(\sqrt{2} - 1\right) < x < 2$

Il perimetro del rettangolo è quindi massimo se $x = 2(\sqrt{2} - 1) \cong 0.83$

3)

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione di Σ attorno all'asse x.

Il volume richiesto è il doppio del volume del solido generato dalla rotazione di 360° attorno all'asse x della porzione S di Σ che si trova nel primo quadrante.



L'arco AC della circonferenza γ_1 ha equazione: $y = f(x) = \sqrt{12 - x^2 - 4x}$.

$$V(generato\ da\ S) = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 \left(\sqrt{12 - x^2 - 4x}\right)^2 dx =$$

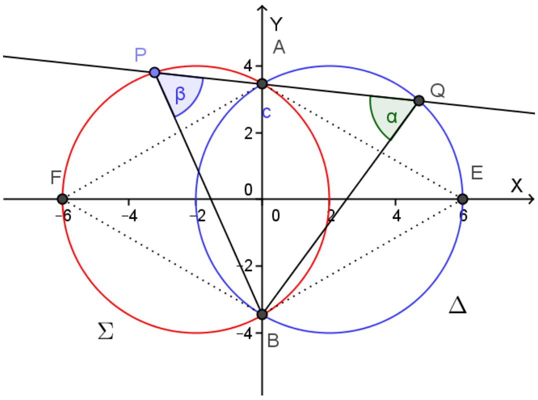
$$= \pi \int_0^2 (12 - x^2 - 4x)dx = \pi \left[12x - \frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^2 = \pi \left[24 - \frac{8}{3} - 8\right] = \frac{40}{3}\pi\, u^3$$

Quindi il volume richiesto è quindi:

$$2 \cdot V(generato\ da\ S) = 2 \cdot \frac{40}{3}\pi\, u^3 = \left(\frac{80}{3}\pi\right)\, u^3 \cong 83.776\, u^3$$

4)

Scelto un punto P su C_1, si indichi con Q l'ulteriore intersezione di C_2 con la retta PA e si provi che il triangolo PQB è equilatero. Si determini la posizione di P affinché il triangolo abbia lato massimo.

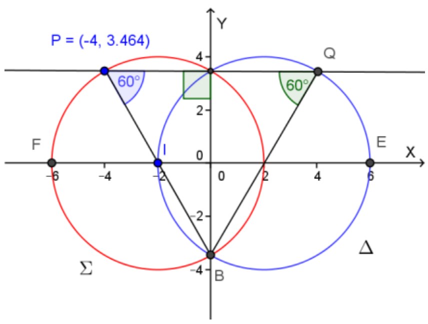


Risulta:
$\alpha = P\hat{Q}B = A\hat{Q}B = A\hat{E}B$: perché insistono sullo stesso arco AB (nella circonferenza C_2)
$\beta = Q\hat{P}B = A\hat{P}B = A\hat{F}B$: perché insistono sullo stesso arco AB (in C_1)

Ma i triangoli AEB e AFB sono equilateri, poiché l'altezza relativa alla base AB misura 6, che è uguale ai 3/2 del raggio (4), e questa è una proprietà caratteristica dei triangoli equilateri inscritti in una circonferenza.

Quindi α e β misurano 60° e ciò è sufficiente per dedurre che il triangolo PQB è equilatero.

Al variare di P su C_1 il massimo valore di BP (corda di C_1 con l'estremo B fisso) si ha quando BP è un diametro: quindi il massimo valore del lato del triangolo PBQ è $2R = 8$.
In tal caso il triangolo ABP è rettangolo in A, quindi, essendo $\beta = 60°$, risulta:
$AP = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$. Inoltre, essendo AP perpendicolare ad AB, l'ordinata di P è uguale a quella di A. Essendo AB lato di triangolo equilatero inscritto in una circonferenza:
$AB = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, l'ordinata di A vale $2\sqrt{3}$.



Pertanto le coordinate di P quando il triangolo ha lato massimo sono:

$$P = \left(-4;\ 2\sqrt{3}\,\right)$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri