Scuole italiane all'estero (Europa) 2013 - PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da $f(x) = \frac{lnx}{x}$ *per tutti i numeri reali* $x > 0$.

1)

Si studi f e se ne tracci il grafico Φ indicando le coordinate degli eventuali punti di massimo, di minimo o di flesso.

Dominio: $x > 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli: visto il dominio, non ci possono essere simmetrie notevoli (la funzione non può essere né pari né dispari).

Intersezioni con gli assi cartesiani:
x=0, non ha senso
$y = 0, \quad lnx = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$

Segno della funzione: $f(x) \geq 0 \quad \frac{lnx}{x} \quad \Longrightarrow (dato\ che\ x > 0) \quad x \geq 1$

Limiti:

$\lim_{x\to0^+} \frac{lnx}{x} = -\infty \qquad (x = 0 \quad asintoto\ vertivcale)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0^+ \qquad (y = 0\ \ sintoto\ orizzontale;\ no\ asintoti\ obliqui)$$

Derivata prima:

$y' = \frac{1-lnx}{x^2} \geq 0$ se $\quad 1 - lnx \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad lnx \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < e$

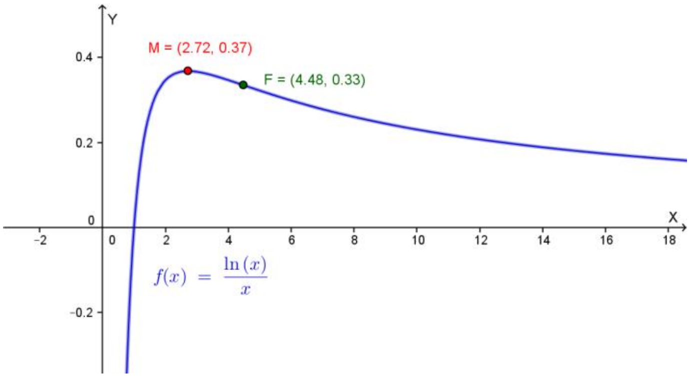
Quindi la funzione è crescente in $0 < x < e$ e decrescente per $x > e$.
Per $x = e$ abbiamo un massimo assoluto, che vale $f(e) = \frac{1}{e} \cong 0.37$

Derivata seconda:

$y'' = \frac{2lnx-3}{x^3} \geq 0 \quad se \quad 2lnx - 3 \geq 0, \quad cioè\ se \quad x \geq e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e} \cong 4.48$

Il grafico Φ della funzione volge quindi la concavità verso l'alto se $x > e^{\frac{3}{2}}$ e verso il basso se $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$. Per $x = e^{\frac{3}{2}}$ ha un flesso, di ordinata $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} \cong 0.33$

Grafico della funzione $y = \frac{lnx}{x}$



2)

Si scriva l'equazione della tangente a Φ nel punto $x = e^2$.

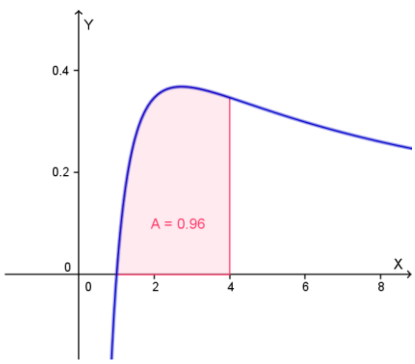
$f(x) = \frac{lnx}{x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1-lnx}{x^2}$ $\qquad f(e^2) = \frac{2}{e^2}$ $\qquad f'(e^2) = \frac{-1}{e^4}$

La **tangente** richiesta ha quindi equazione:

$$y - \frac{2}{e^2} = \frac{-1}{e^4}(x - e^2) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{e^4}x + \frac{3}{e^2}$$

3)

Si calcoli l'area della parte di piano delimitata da Φ e dall'asse x sull'intervallo [1, 4] e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia il valore arrotondato con due cifre decimali.



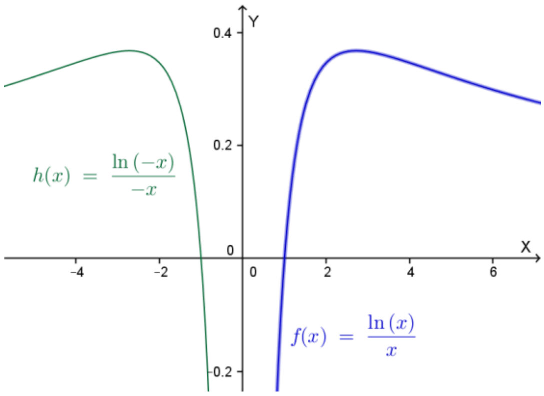
L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_1^4 \frac{lnx}{x}\,dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^4 = \frac{1}{2}(\ln^2 4 - 0) = \left(\frac{1}{2}\ln^2 4\right)\,u^2 \cong 0.96\,u^2$$

4)

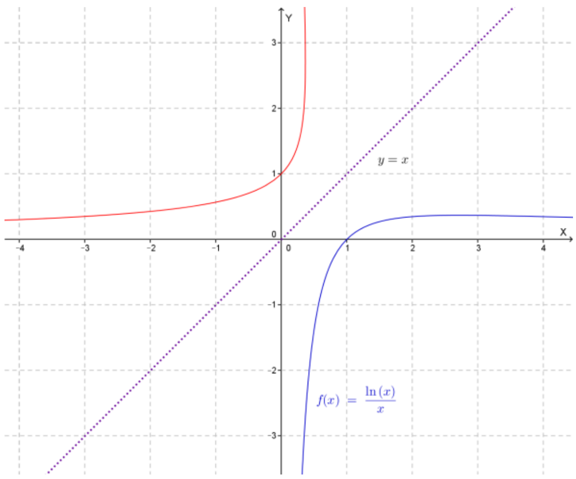
Si disegni la curva simmetrica di Φ rispetto all'asse y e se ne scriva l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di Φ rispetto alla retta $y = x$.

La curva simmetrica di Φ rispetto all'asse y ha equazione $y = f(-x) = \frac{\ln(-x)}{-x}$



La curva simmetrica di Φ rispetto alla retta asse $y = x$ ha equazione:

$x = f(y) = \frac{\ln(y)}{y}$, da cui: $xy - \ln(y) = 0$



Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri