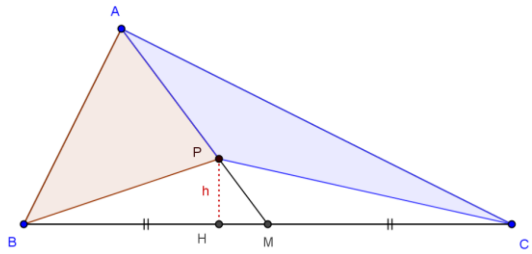
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (EUROPA)
SESSIONE ORDINARIA 2013

QUESITO 1

Dato un triangolo ABC, si indichi con M il punto medio del lato BC. Si dimostri che la mediana AM è il luogo geometrico dei punti P del triangolo, tali che i triangoli ABP e ACP hanno aree uguali.

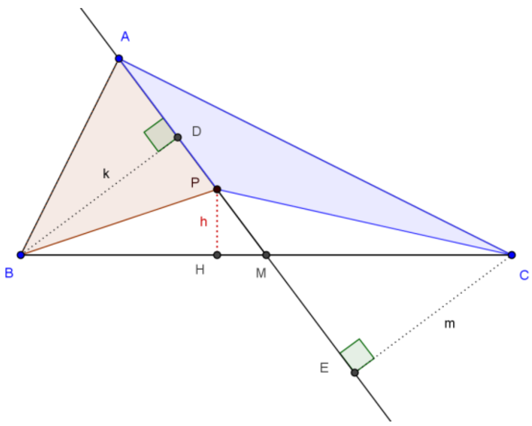


Supponiamo P appartenente alla mediana AM e dimostriamo che i due triangoli ABP e ACP hanno la stessa area.

I triangoli ABM ed ACM hanno la stessa area poiché hanno ugual base (BM ed MC) ed ugual altezza (l'altezza relativa a BM è uguale a quella relativa ad MC, in quanto è l'altezza del triangolo ABC relativa a BC).
Anche PBM e PCM hanno la stessa area (BM è uguale ad MC e l'altezza relativa a BM ed MC è la stessa, h).
Per differenza si ha che ABP e ACP hanno la stessa area.

Supponiamo ora che i due triangoli ABP e ACP abbiano la stessa area e dimostriamo che P appartiene alla mediana AM.

Preso un punto generico P interno al triangolo, tale che ABP e ACP abbiano la stessa area, indichiamo con M l'intersezione della retta AP con BC: dobbiamo dimostrare che M è il punto medio di BC, cioè che BM ed MC sono uguali.



Poiché ABP ed ACP hanno la stessa area e la base AP in comune, le altezze relative a tali lati (k ed m) sono uguali: ciò equivale a dire che la distanza di A dalla retta AM è uguale alla distanza di C dalla stessa retta AM. Ma allora i due triangoli ABM e ACM hanno la stessa area (base AM comune è uguali altezze relative k ed m). Ne segue che, per differenza, anche i triangoli APM e PCM hanno la stessa area; ma l'altezza relativa alle basi AM ed MC è la stessa (h), quindi le basi BM e CM devono essere uguali, c.v.d.

QUESITO 2

In un libro si legge: "Ogni misura di grandezza implica una nozione approssimativa di numero reale". Si chiede di spiegare, eventualmente con qualche esempio, il significato di tale frase.

Ricordiamo che il termine "grandezza" sta ad indicare una qualità dei corpi che soddisfa due proprietà: la confrontabilità e l'additività.
Le grandezze hanno anche un'altra caratteristica: sono misurabili.
Misurare una grandezza, riferiamoci per esempio ai segmenti, vuol dire stabilire quante volte una grandezza omogenea, scelta come unità di misura, è contenuta in essa. Il numero che si ottiene si chiama lunghezza del segmento.
Se le grandezze sono commensurabili, il loro rapporto è un numero razionale (positivo), se sono incommensurabili (come, ad esempio, la diagonale di un quadrato ed il lato del quadrato stesso) il loro rapporto è un numero irrazionale (positivo).

Quindi il concetto di misura di una grandezza implica la nozione di numero reale.

QUESITO 3

Si verifichi l'identità: $2cotg(2\alpha) + tg(\alpha) = cotg(\alpha)$.

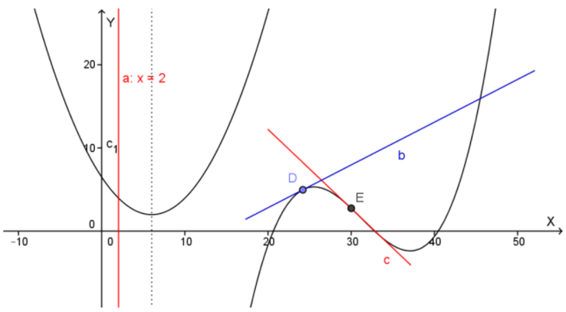
Siccome: $cotg(2\alpha) = \frac{1}{tg(2\alpha)} = \frac{1-tg^2(\alpha)}{2tg(\alpha)}$ si ha:

$$2cotg(2\alpha) + tg(\alpha) = 2 \cdot \frac{1-tg^2(\alpha)}{2tg(\alpha)} + tg(\alpha) = \frac{1-tg^2(\alpha)}{tg(\alpha)} + tg(\alpha) =$$
$$= \frac{1}{tg(\alpha)} - tg(\alpha) + tg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = cotg(\alpha).$$

QUESITO 4

E' appropriato definire una ***retta tangente*** *a una curva C in un punto P di C come una retta che ha un solo punto in comune con C? Si motivi esaurientemente la risposta.*

No, non è appropriato. Diamo alcuni esempi:

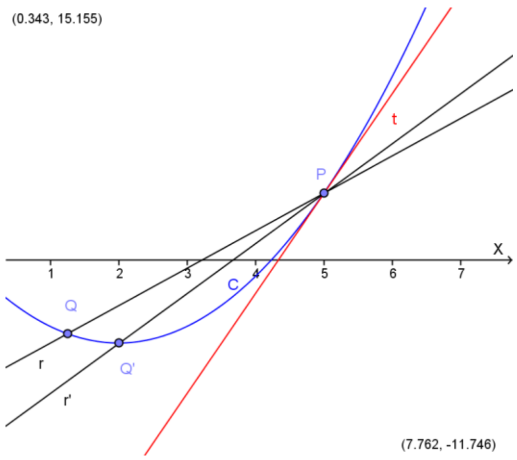


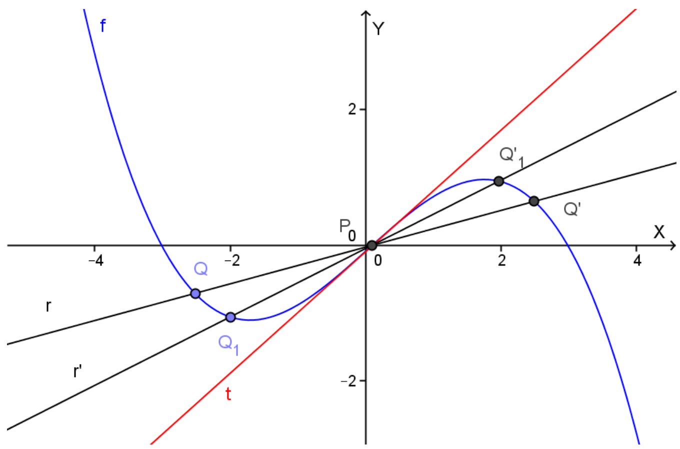
la retta a, parallela all'asse di una parabola, ha con la curva un solo punto in comune ma non è tangente.
La retta b è tangente in D alla curva ma non ha con essa un solo punto in comune.
La retta c ha con la curva "un solo punto" in comune, ma in realtà sono tre coincidenti (si tratta della tangente inflessionale di una cubica).

In generale un retta t è tangente ad una curva C in un punto P se ha con C almeno due intersezioni coincidenti in P (t può avere, eventualmente, altre intersezioni con la curva oltre a P).

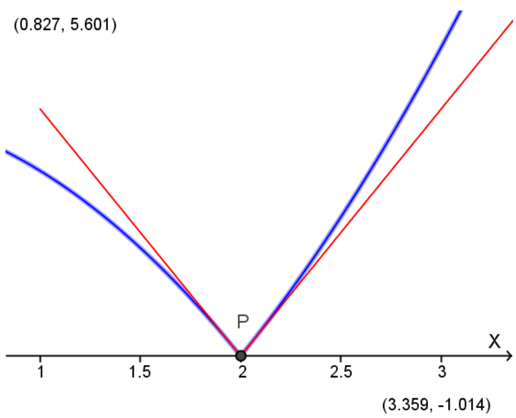
La definizione più completa è la seguente:

Data una curva C ed un suo punto P, consideriamo un generico punto Q della curva e sia r la retta che congiunge P con Q. Se esiste la posizione limite t di r, quando Q si avvicina a P in modo qualsiasi, la retta t è detta tangente alla curva in P.





Nel punto P della curva C seguente, non esiste la tangente, poiché non esiste la posizione limite della generica secante (esiste il limite destro ed esiste il limite sinistro, quindi esisteranno due semitangenti, ma non esiste la tangente):

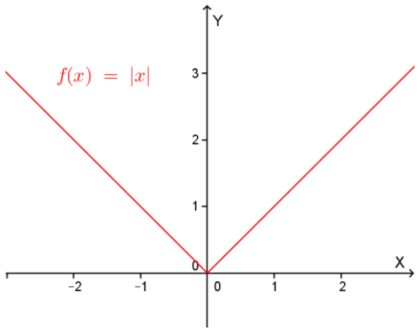


QUESITO 5

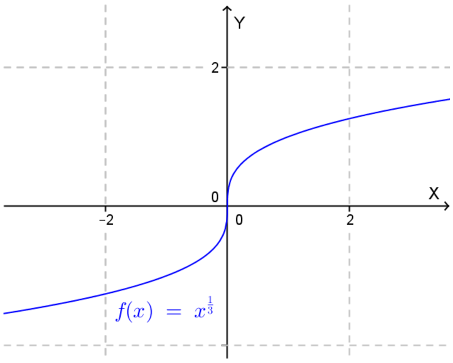
Si faccia un esempio di una funzione, definita per tutti i numeri reali x, che sia priva di derivata:

a) in un certo punto; b) in più punti; c) in infiniti punti.

(a)

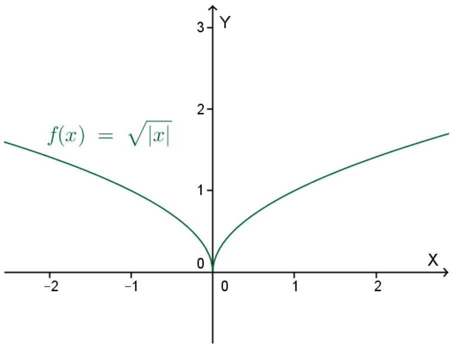


f(x)=|x| è definita su tutto R ed è derivabile dappertutto tranne che in x=0 (dove c'è un punto angoloso)



$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x}}$$

è definita su tutto R ed è derivabile dappertutto tranne che in x=0 (dove c'è un punto di flesso a tangente verticale)

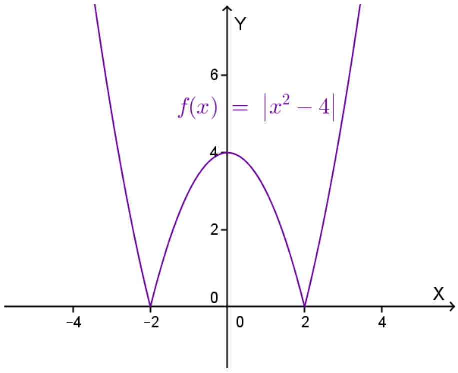


$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{|x|}}$$

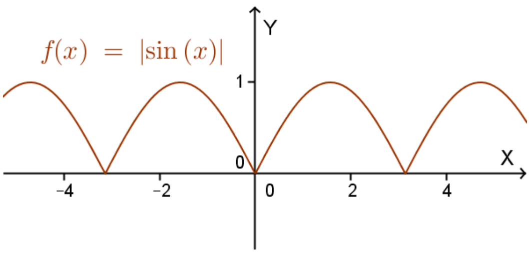
è definita su tutto R ed è derivabile dappertutto tranne che in x=0 (dove c'è una cuspide)

(b)

La funzione di equazione $f(x) = |x^2 - 4|$ è definita su tutto R ed è derivabile dappertutto tranne che in x=-2 e x=2 (dove ci sono dei punti angolosi)



(c)



$$f(x) = |sen(x)|$$

è definita su tutto R ed ha infiniti punti di non derivabilità, e precisamente punti angolosi per

$$x = \pi + k\pi \,, \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$

QUESITO 6

Un cono rotondo ha altezza h = 5 dm e raggio r = 3 dm. Si vuole diminuire la prima di quanto si aumenta il secondo in modo che il volume del cono aumenti del 30 %. Si dica se la questione ammette soluzioni e, in caso affermativo, si dica quali sono.

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $V_2 = \frac{1}{3}\pi(r+x)^2(h-x) = 1.3\, V_1$, con 0<x<5

$\frac{1}{3}\pi(r+x)^2(h-x) = 1.3\ \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \Longrightarrow \quad (3+x)^2(5-x) = \frac{13}{10} \cdot 9 \cdot 5 = \frac{117}{2}$

Eseguendo i calcoli si arriva all'equazione:

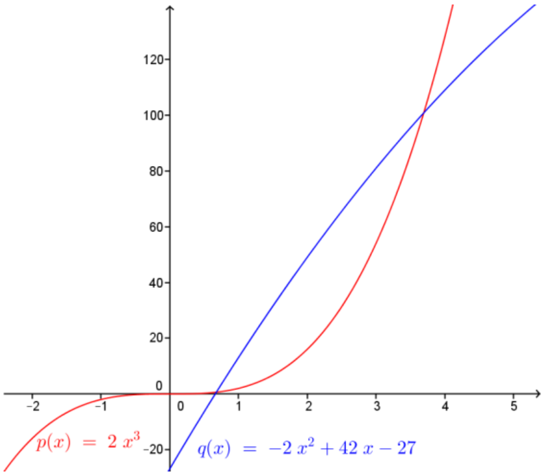
$-x^3 - x^2 + 21x + 45 = \frac{117}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{2x^3 + 2x^2 - 42x + 27 = 0}$ che equivale a:

$\mathbf{2x^3 = -2x^2 + 42x - 27.}$

Rappresentando graficamente le curve di equazioni $y = 2x^3$ e $y = -2x^2 + 42x - 27$
Si verifica che ci sono due soluzioni accettabili:

$$0 < x_1 < 1 \quad e \quad 3 < x_2 < 4$$

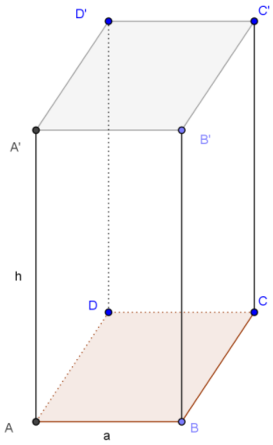
(uno studio più approfondito porta a $x_1 \cong 0.7 \quad e \quad x_2 \cong 3.7$



QUESITO 7

Si vogliono costruire con un determinato materiale, delle scatole, senza coperchio, aventi una base quadrata e facce rettangolari. Se si vuole che il volume di ogni scatola sia 256 dm^3 quali sono le dimensioni della scatola che richiedono la minima quantità di materiale?

N.B nel testo c'è un evidente errore nell'unità di misura del volume (dato in dm^2)



Indichiamo con a il lato del quadrato di base e con h l'altezza della scatola (parallelepipedo retto a base quadrata). Risulta:

$$V = a^2 \cdot h = 256 \;\; da\ cui \;\; h = \frac{256}{a^2}$$

La grandezza da rendere minima (superficie laterale più una base) è:

$$S = a^2 + S_l = a^2 + 4ah = a^2 + 4a \cdot \frac{256}{a^2} = a^2 + \frac{1024}{a} \quad (a > 0)$$

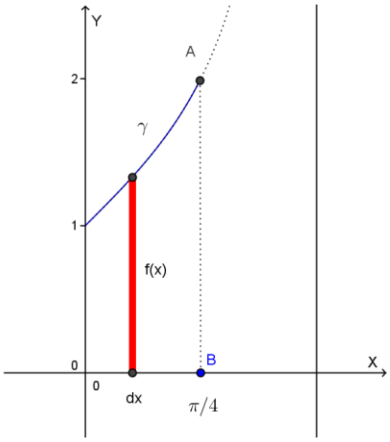
$$S' = 2a - \frac{1024}{a^2} \geq 0 \quad se \quad \frac{2a^3 - 1024}{a^2} \geq 0, \quad a \geq \sqrt[3]{512} = 8$$

S quindi decresce per $0 < a < 8$ e cresce per $a > 8$, pertanto è minima se

$$a = 8$$

QUESITO 8

La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + tgx$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.



Il volume richiesto si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$V = \int_o^{\frac{\pi}{4}} S(x)dx$$

Dove S(x) è l'area del triangolo equilatero di lato $f(x) = 1 + tgx$.

Quindi: $S(x) = (1 + tgx)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$V = \int_o^{\frac{\pi}{4}} S(x)dx = V = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_o^{\frac{\pi}{4}} (1 + tgx)^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_o^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2tgx + tg^2x) \quad dx$$

$$\int (1 + 2tgx + tg^2x) \quad dx = \int (1 + tg^2x + 2tgx) \quad dx = tgx - 2ln|\cos(x)| + K$$

Pertanto:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}[tgx - 2ln|\cos(x)|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 - 2ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 - ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + ln2) \cong 0.733 \quad u^3$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri