LICEO DELLA COMUNICAZIONE 2013 - PROBLEMA 2

Sia Γ la curva d'equazione $y = 2\,ln\,(x-1)$.

1)

Nel piano riferito a coordinate cartesiane Oxy , si disegni Γ. Si scriva l'equazione della curva che è simmetrica di Γ rispetto all'asse y e si scrivano altresì le equazioni delle curve simmetriche di Γ rispetto alle rette $x = 2$ e $y = x$.

Dominio: $x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1: \quad 1 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli: visto il dominio, non ci possono essere simmetrie notevoli (la funzione non può essere né pari né dispari).

Intersezioni con gli assi cartesiani:
x=0, non ha senso
$y = 0, \quad 2\,ln\,(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Segno della funzione: $f(x) \geq 0\ se\ x - 1 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad x \geq 2$

Limiti:

$\lim_{x\to 1^+} 2\ln(x-1) = -\infty \qquad (x = 1\ asintoto\ vertivcale)$

$\lim_{x\to +\infty} 2\ln(x-1) = +\infty \qquad (potrebbe\ esserci\ asintoto\ obliquo)$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln(x-1)}{x} = 0^+ \qquad (non\ c'è asintoto\ obliquo)$$

Derivata prima:

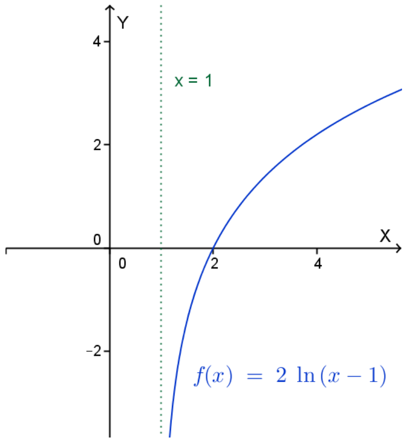
$$y' = \frac{2}{x-1} > 0 \quad \forall x\ del\ dominio: funzione\ sempre\ crescente$$

$$y'' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x\ del\ dominio: funzione\ sempre\ concava\ verso\ il\ basso$$

Derivata seconda:

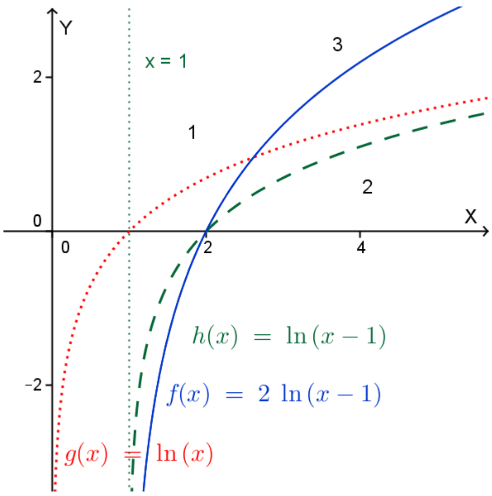
$$y'' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x\ del\ dominio: funzione\ sempre\ concava\ verso\ il\ basso$$

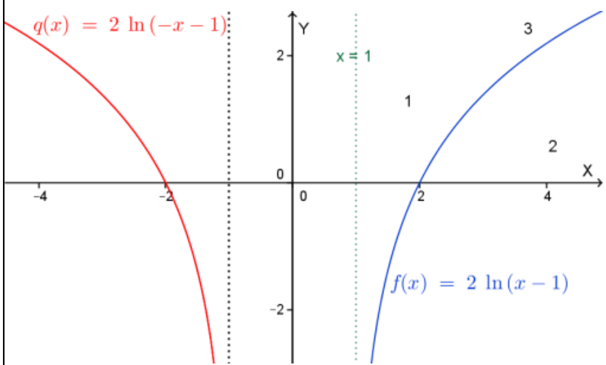
Grafico della funzione $y = 2\,ln\,(x - 1)$



N.B.

Il grafico di $y = 2\,ln\,(x - 1)$ si può ottenere a partire dal grafico di $y = ln\,(x)$ operando una traslazione verso destra di 1 ed una dilatazione verticale di fattore 2:





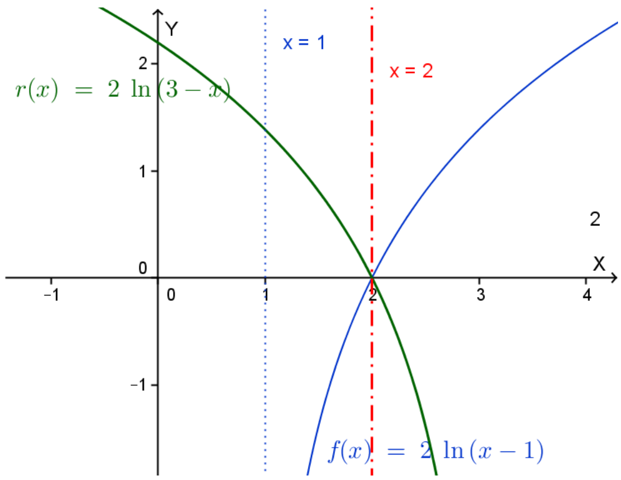
La *simmetrica* *di Γ rispetto all'asse y si ottiene scambiando x in –x:*

$$y = 2\,ln\,(x - 1) \quad \Longrightarrow \quad y = 2\ln(-x - 1)$$

La simmetrica di Γ rispetto alla rette $x = 2$ si ottiene operando la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4 - x' \\ y = y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \to 4 - x \\ y \to y \end{cases}$$

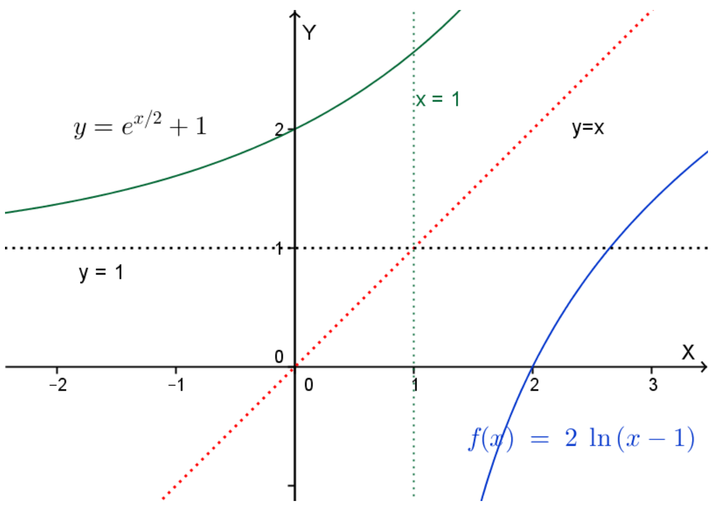
$$y = 2\,ln\,(x - 1) \quad \Longrightarrow \quad y = 2\ln(4 - x - 1) \quad \Longrightarrow \quad y = 2\ln(3 - x)$$



La simmetrica di Γ rispetto alla rette $y = x$ si ottiene scambiando la x con la y:

$$y = 2\,ln\,(x - 1) \quad \Longrightarrow \quad x = 2\ln(y - 1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{2} = \ln(y - 1) \quad \Longrightarrow \quad y - 1 = e^{\frac{x}{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad y = e^{\frac{x}{2}} + 1$$



2)

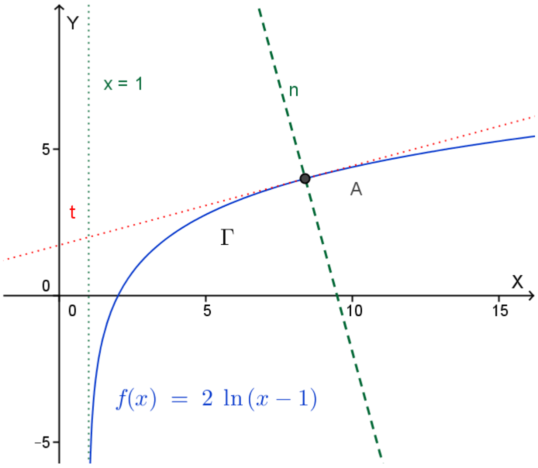
Si trovi l'equazione della normale a Γ nel suo punto di ascissa $e^2 + 1$ dove e è il numero di $Nepero$.

$y = 2\,ln\,(x - 1)$ $\qquad$ $y' = \frac{2}{x-1}$

$x = e^2 + 1$ $\qquad$ $y(e^2 + 1) = 2\,ln\,(e^2) = 4$ $\qquad$ $y'(e^2 + 1) = \frac{2}{e^2}$

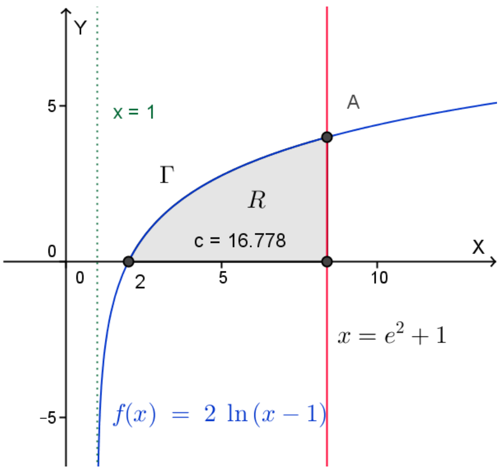
La normale n a Γ nel suo punto di ascissa $e^2 + 1$ ha coefficiente angolare $-\frac{e^2}{2}$, la sua equazione è quindi:

$$y - 4 = -\frac{e^2}{2}(x - e^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{e^2}{2}x + \frac{e^4}{2} + \frac{e^2}{2} + 4$$



3)

Si calcoli l'area della regione R del piano delimitata da Γ, dall'asse x e dalla retta $x = e^2 + 1$.



L'area della regione R si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area(R) = c = \int_2^{e^2+1} 2\,\ln(x-1)\,dx$$

Troviamo una primitiva di $ln\,(x - 1)$ integrando per parti:

$$\int \ln(x-1)\,dx = xln(x-1) - \int \frac{x}{x-1}dx =$$

$$= xln(x-1) - \int \frac{x-1+1}{x-1}dx =$$

$$= xln(x-1) - \int dx - \int \frac{1}{x-1} dx = xln(x-1) - x - \ln|x-1| + k$$

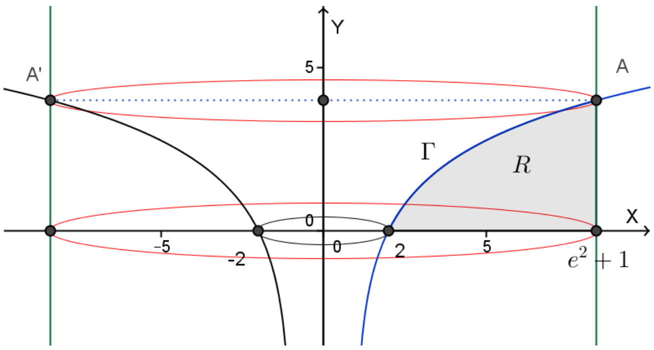
Quindi:

$$Area(R) = c = \int_2^{e^2+1} 2\ \ln(x-1)\, dx = 2[xln(x-1) - x - \ln|x-1|]_2^{e^2+1} =$$

$$= 2[(e^2+1)\cdot 2 - e^2 - 1 - 2 - (-2)] = 2(e^2+1)\, u^2 \cong 16.78\, u^2$$

4)

La regione R ruotando attorno all'asse y genera il solido Ω. Si calcoli il volume di Ω.



Il volume richiesto si può calcolare con il **"metodo dei gusci cilindrici"** mediante l'integrale:

$$\boldsymbol{V(\Omega) = \int_2^{e^2+1} (2\pi x) f(x) dx}$$

$$\int_2^{e^2+1} (2\pi x) 2\ln(x-1)\, dx = 4\pi \int_2^{e^2+1} x\ln(x-1)\, dx =$$

Integrando per parti

$$\int x\ln(x-1)\, dx = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x-1)$$

Quindi:

$$4\pi \int_2^{e^2+1} x\ln(x-1)\, dx = 4\pi\left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x-1)\right]_2^{e^2+1} =$$

$$= 4\pi\left[-\frac{1}{4}(e^2+1)^2 + \frac{1}{2}(e^2+1)^2\cdot 2 - \frac{1}{2}(e^2+1) - \frac{1}{2}\cdot 2 - (-1-1)\right] =$$

$$= 4\pi\left[-\frac{1}{4}(e^2+1)^2+(e^2+1)^2-\frac{1}{2}(e^2+1)-1)+2\right]=$$

$$= 4\pi\left[\frac{3}{4}(e^2+1)^2-\frac{1}{2}(e^2+1)+1\right]=\pi[3(e^2+1)^2-2(e^2+1)+4]=$$

$$= \pi(3e^4+4e^2+5)\,u^3 \cong 623.137\,u^3 = \boldsymbol{V(\Omega)}$$

Per un ulteriore approfondimento sul **Metodo dei gusci cilindrici** si veda la seguente pagina di Matefilia:

http://www.matefilia.it/argomen/gusci-cilindrici/metodo-gusci-cilindrici.pdf

Il volume richiesto si può calcolare anche come differenza tra il volume V_1 del cilindro con raggio di base e^2+1 e altezza 4 ed il volume V_2 del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della regione delimitata dell'arco di Γ che delimita R, dall'asse y e dalla retta $y=4$.

$$V_1=\pi R^2 h=\pi(e^2+1)^2\cdot 4=4\pi(e^2+1)^2=4\pi(e^4+2e^2+1)$$

Per calcolare V_2 consideriamo la funzione inversa di $y=2\ln(x-1)$, che è $x=g(y)=e^{\frac{y}{2}}+1$ e calcoliamo il seguente integrale:

$$V_2=\pi\int_0^4 g^2(y)dy=$$

$$=\pi\int_0^4 g^2(y)dy=\pi\int_0^4\left(e^{\frac{y}{2}}+1\right)^2dy=\pi\int_0^4\left(e^y+2e^{\frac{y}{2}}+1\right)dx=$$

$$=\pi\left[e^y+4e^{\frac{y}{2}}+y\right]_0^4=\pi[e^4+4e^2+4-(1+4)]=\pi(e^4+4e^2-1)$$

Quindi:

$$\boldsymbol{V(\Omega)=V_1-V_2}=4\pi(e^4+2e^2+1)-\pi(e^4+4e^2-1)=\pi(3e^4+4e^2+5)\,u^3$$

che coincide con il valore trovato con il metodo dei gusci cilindrici.

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri