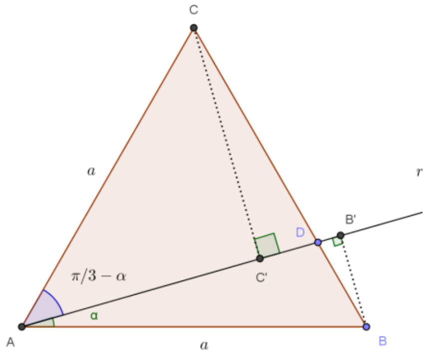
## ORDINAMENTO 2013 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

*ABC è un triangolo equilatero di lato a. Dal vertice A, e internamente al triangolo, si conduca una semiretta r che formi l'angolo α con il lato AB. Si denotino con B' e C' , rispettivamente, le proiezioni ortogonali su r dei vertici B e C.*




### 1)

*Si calcoli il rapporto:*

$$\frac{BB'^2 + CC'^2}{a^2}$$

*e lo si esprima in funzione di* $x = tg\alpha$ *, controllando che risulta:*

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3}{4(x^2+1)}$$

$BB' = AB \cdot sen\alpha = a \cdot sen\alpha \qquad CC' = ACB \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = a \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

$$\frac{BB'^2 + CC'^2}{a^2} = \frac{(a \cdot sen\alpha)^2 + \left(a \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right)^2}{a^2} = sen^2\alpha + sen^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) =$$

$$= sen^2\alpha + \left(sen\frac{\pi}{3}cos\alpha - cos\frac{\pi}{3}sen\alpha\right)^2 = sen^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha - \frac{1}{2}sen\alpha\right)^2 =$$

$$= sen^2\alpha + \frac{3}{4}\cos^2\alpha + \frac{1}{4}sen^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha\, sen\alpha = \frac{5}{4}sen^2\alpha + \frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}sen\,2\alpha =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1+tg^2\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{5\,tg^2\alpha + 3 - 2\sqrt{3}tg\alpha}{4(1+tg^2\alpha)}$$

*E ponendo* $x = tg\alpha$ *(con* $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3}$*)*, si ottiene: $f(x) = \frac{5x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3}{4(x^2+1)}$.

## 2)

*Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico* $\gamma$ *.*

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{5x^2-2\sqrt{3}\,x+3}{4(x^2+1)}}$$

**Dominio**: $-\infty < x < +\infty$

**Simmetrie notevoli:**

$$f(-x)=\frac{5x^2+2\sqrt{3}\,x+3}{4(x^2+1)}\begin{cases}\neq f(x):\ non\ pari\\ \neq -f(x):\ non\ dispari\end{cases}$$

**Intersezioni con gli assi cartesiani:**

$x=0, \qquad y=\dfrac{3}{4} \qquad\qquad y=0, \qquad 5x^2-2\sqrt{3}\,x+3=0 \quad \Delta<0, \quad \nexists x$

**Segno della funzione:** $y>0 \quad \forall\, x$

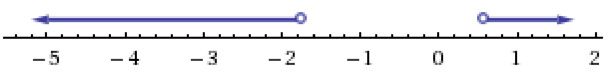
**Limiti:**

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2-2\sqrt{3}\,x+3}{4(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2}{4x^2}=\frac{5}{4}$ ( $y=\frac{5}{4}$ asintoto orizzontale; non ci sono asintoti obliqui)

**Derivata prima:**

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}\,x^2+2\,x-\sqrt{3}}{2(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)>0 \ \Longrightarrow\ \sqrt{3}\,x^2+2\,x-\sqrt{3}>0, \quad x<-\sqrt{3}\,, x>\frac{1}{\sqrt{3}}$$




La funzione è crescente per $x<-\sqrt{3}$ , $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$ , decrescente per $-\sqrt{3}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$; abbiamo un massimo relativo (e assoluto) in $M=\left(-\sqrt{3}\,;\frac{3}{2}\right)$ ed un minimo relativo (e assoluto) in $m=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{2}\right)$.

**Derivata seconda:**

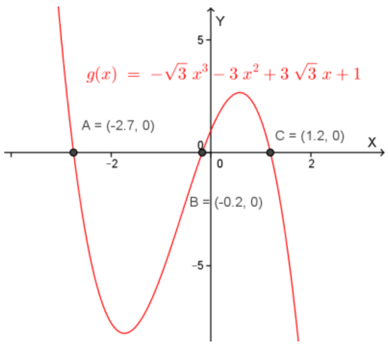
$$f''(x) = \frac{-\sqrt{3}x^3 - 3\,x^2 + 3\sqrt{3}x + 1}{(x^2+1)^3} > 0 \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt{3}x^3 - 3\,x^2 + 3\sqrt{3}x + 1 > 0$$

L'equazione $-\sqrt{3}x^3 - 3\,x^2 + 3\sqrt{3}x + 1 = 0$ ha le radici approssimate

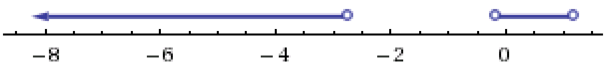
$x_1 \cong -2.7,\; x_2 \cong -0.2, \quad x_1 \cong -2.7$

come si può dedurre da uno studio approssimativo della funzione

$y = -\sqrt{3}x^3 - 3\,x^2 + 3\sqrt{3}x + 1$

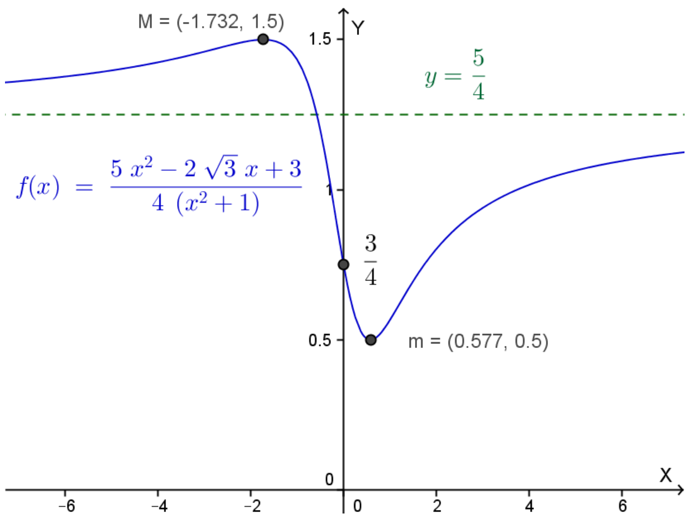



Pertanto $f''(x) > 0 \;\; se\; x < x_1 \;\; oppure \;\; x_2 < x < x_3$ in cui il grafico è concavo verso l'alto:




Abbiamo 3 flessi per $x_1 \cong -2.7,\; x_2 \cong -0.2, \quad x_1 \cong -2.7$

Il grafico della funzione è il seguente:



## 3)

*Si determinino le coordinate del punto in cui la curva $\gamma$ incontra il suo asintoto e si scriva l'equazione della tangente ad essa in tale punto.*

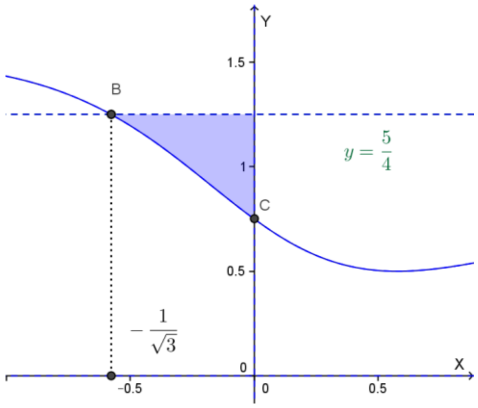
Il punto richiesto si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{5x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3}{4(x^2+1)} \\ y = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{5x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3}{4(x^2+1)} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad -2\sqrt{3}\,x + 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Le coordinate del punto $A$ in cui la curva $\gamma$ incontra il suo asintoto sono: $\boldsymbol{A = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{5}{4}\right)}$.
La tangente alla curva $\gamma$ in $A$ ha equazione $y - \frac{5}{4} = f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
essendo $f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{8}\sqrt{3} \cong -0.7$, la tangente ha equazione: $\boldsymbol{y = -\frac{3}{8}\sqrt{3}\,x + \frac{7}{8}}$

## 4)

*Si determini l'area della superficie piana, appartenente al $II$ quadrante, delimitata dall'asse $y$, dalla curva $\gamma$ e dal suo asintoto.*




$$Area = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{5}{4} - \frac{5x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3}{4(x^2+1)}\right) dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{2\sqrt{3}\,x + 2}{4(x^2+1)}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{\sqrt{3}\,x + 1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{\sqrt{3}\,x}{x^2+1}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{2\,x}{x^2+1}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} \left(\frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[ln|x^2+1|\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} + \frac{1}{2}\left[arctgx\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[0 - ln\frac{4}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{4}ln\frac{4}{3} + \frac{\pi}{6}$$

Quindi:

$$Area = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}ln\frac{4}{3}\right) u^2 \cong 0.40\, u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri