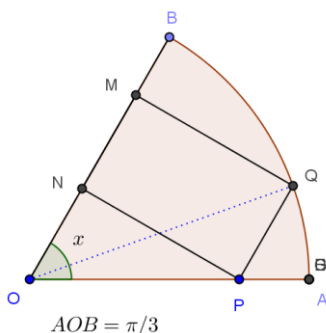


## ORDINAMENTO 2013 SESSIONE SUPPLETIVA

### QUESITO 1

E' dato il settore circolare AOB, di centro O, raggio r e ampiezza  $\frac{\pi}{3}$ . Si inscriba in esso il rettangolo PQMN, con M ed N sul raggio OB, Q sull'arco AB e P su OA. Si determini l'angolo  $Q\hat{O}B = x$ , affinché il perimetro del rettangolo sia massimo.



Deve essere  $2p(PQMN) = \max$

$Q\hat{O}B = x$ .

Se  $Q \equiv B$   $x = 0$ ; se  $Q \equiv A$   $x = \frac{\pi}{3}$ : quindi  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

Determiniamo i lati del rettangolo.

$$MQ = OQ \cdot \text{sen}x = r \text{sen}x = PN$$

Risulta:  $P\hat{O}Q = \frac{\pi}{3} - x$ ,  $O\hat{P}Q = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$

Quindi, per il Teorema dei seni applicato al triangolo OPQ, risulta:

$$\frac{PQ}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} = \frac{OQ}{\text{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right)} \Rightarrow PQ = \frac{OQ \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\text{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{r \cdot \left(\text{sen}\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\text{sen}x\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\text{sen}x\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$PQ = \frac{r \cdot (\sqrt{3}\cos x - \text{sen}x)}{\sqrt{3}} = MN$$

Il perimetro del rettangolo è quindi:

$$2p(PQMN) = 2PN + 2MN = 2r \text{sen}x + 2 \cdot \frac{r \cdot (\sqrt{3}\cos x - \text{sen}x)}{\sqrt{3}} = \max \text{ se lo è:}$$

$$z = \text{sen}x + \frac{(\sqrt{3}\cos x - \text{sen}x)}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\cos x + (\sqrt{3} - 1)\text{sen}x}{\sqrt{3}} = \max \text{ se lo è}$$

$$y = \sqrt{3}\cos x + (\sqrt{3} - 1)\text{sen}x$$

Pertanto il perimetro del rettangolo è massimo quando è massima la funzione

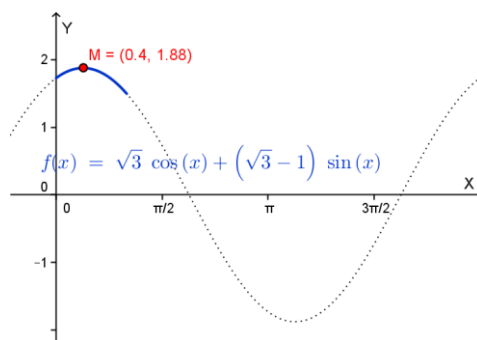
$$f(x) = \sqrt{3}\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \quad \text{nell'intervallo } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$f'(x) = -\sqrt{3}\sin x + (\sqrt{3} - 1)\cos x = 0 \quad \text{se } \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$x_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) \cong 0.40 \text{ rad} \cong 22.9^\circ \quad (\text{notiamo che } x_0 \text{ è nell'intervallo } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3})$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ se } \operatorname{tg} x \leq \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \text{ quindi per } 0 \leq x \leq x_0$$

La funzione (quindi il perimetro del rettangolo) cresce in  $0 \leq x < x_0$  e decresce in  $x_0 < x < \frac{\pi}{3}$ ; ha **massimo per**  $x = x_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)$



## QUESITO 2

Quali sono i poliedri regolari? Perché sono detti anche **solidi platonici**?

I poliedri regolari (detti **solidi platonici**) sono **5**, e le loro facce possono essere solo triangoli equilateri, quadrati o pentagoni regolari.

Il termine **Solidi Platonici** è dovuto al fatto che Platone ne dà una dettagliata descrizione nel dialogo "**Timeo**". Platone associa ogni elemento a un solido regolare:

la **Terra** è associata all'**Esaedro (il Cubo)**;

l'**Acqua** si associa all'**Icosaedro**;

all'**Aria** si associa l'**Ottaedro**;

al **Fuoco** si associa il **Tetraedro**.

Platone fa solo un breve cenno al **Dodecaedro**: "il dio se ne servì per decorare l'universo"; nel **Fedone** afferma che il Dodecaedro fosse la forma dell'universo.



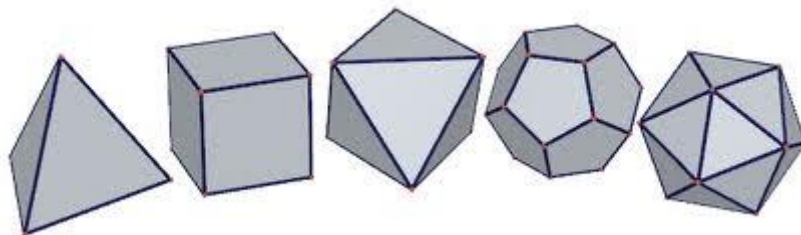
Vediamo come mai **ci sono solo 5 poliedri regolari**.

Poiché in ogni vertice di un poliedro devono convergere almeno tre facce (non complanari), la somma dei loro angoli deve essere inferiore ad un angolo giro. Le facce possono essere solo triangoli equilateri (**tetraedro, ottaedro, icosaedro**), quadrati (**esaedro o cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).

Con tre facce esagonali avremmo come somma almeno  $120^\circ \times 3 = 360^\circ$ , quindi non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.

Si hanno infatti le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli (equilateri): le facce degli angoloidi possono essere 3 ( $3 \times 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ$ ), 4 ( $4 \times 60^\circ = 240^\circ < 360^\circ$ ), 5 ( $5 \times 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$ ), ma non di più: con 6 facce avremmo  $6 \times 60^\circ = 360^\circ$  che non è minore di  $360^\circ$ .  
Abbiamo quindi tre poliedri regolari con le facce triangolari: **il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro**.
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 ( $3 \times 90^\circ = 270^\circ$ , ma  $4 \times 90^\circ = 360^\circ$ ): in questo caso si ha l'**esaedro (il cubo)**.
3. Se le facce del poliedro sono pentagoni (regolari), ogni angoloide può avere al massimo 3 facce ( $3 \times 108^\circ = 324^\circ$ ): in questo caso si ha il **dodecaedro regolare**.
4. Non possono esistere poliedri regolari le cui facce abbiamo più di 5 lati (per esempio già con l'esagono avremmo  $3 \times 120^\circ = 360^\circ$ ).



### QUESITO 3

Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$x = \frac{1}{2} \log \left( \frac{y+1}{y-1} \right)$$

Nel punto  $P$  di ordinata  $y = 2$ .

Con  $y = 2$  otteniamo  $x = \frac{1}{2} \log 3$ , quindi  $P$  ha coordinate:  $P = \left( \frac{1}{2} \log 3; 2 \right)$

La tangente in  $P$  ha equazione:  $x - \frac{1}{2} \log 3 = x'(2)(y - 2)$

$$x' = \frac{1}{2} \cdot \frac{D\left(\frac{y+1}{y-1}\right)}{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{2}{(y-1)^2}}{\frac{y+1}{y-1}} = -\frac{1}{y^2-1} \Rightarrow x'(2) = -\frac{1}{3}. \quad \text{Quindi la tangente in } P \text{ ha}$$

$$\text{equazione: } x - \frac{1}{2} \log 3 = -\frac{1}{3}(y - 2) \Rightarrow x = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log 3$$

**N.B.**

Troviamo l'inversa di  $x = \frac{1}{2} \log \left( \frac{y+1}{y-1} \right)$ ;  $2x = \log \left( \frac{y+1}{y-1} \right) \Rightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow e^{2x}(y-1) = y+1$

$$y(e^{2x} - 1) = 1 + e^{2x} \Rightarrow y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

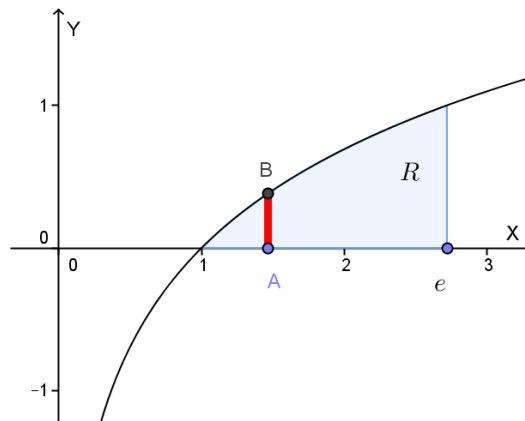
Trovare la tangente a  $y = \frac{1}{2} \log \left( \frac{y+1}{y-1} \right)$  in  $P = \left( \frac{1}{2} \log 3; 2 \right)$  equivale a trovare la tangente a  $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$  in  $P' = \left( \frac{1}{2} \log 3; 2 \right)$ , che è  $y - 2 = f' \left( \frac{1}{2} \log 3 \right) \left( x - \frac{1}{2} \log 3 \right)$  equivalente a:

$$y - 2 = -3 \left( x - \frac{1}{2} \log 3 \right) \Rightarrow y = -3x + \frac{3}{2} \log 3 + 2 \text{ che è uguale alla retta trovata prima:}$$

$$x = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log 3.$$

**QUESITO 4**

Un solido  $\Omega$  ha per base la regione  $R$  delimitata dal grafico di  $f(x) = \ln x$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[1, e]$ . In ogni punto di  $R$  a distanza  $x$  dall'asse  $y$ , la misura dell'altezza del solido è data da  $h(x) = x$ . Quale sarà il volume del solido?



Il volume infinitesimo  $dV$  è dato da  $dV = S(x) \cdot h = (f(x) \cdot dx) \cdot h(x) = (\ln x) \cdot x dx$  quindi:

$$V = \int_1^e x \ln x dx$$

Integrando per parti cerchiamo una primitiva di  $x \ln x$ :

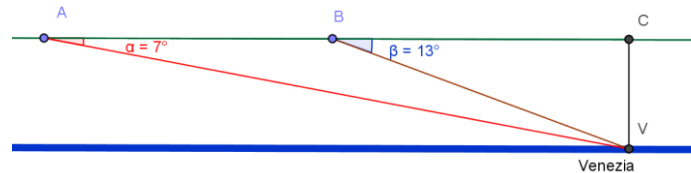
$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

Quindi:

$$V = \int_1^e x \ln x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_1^e = \left[ \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left( 0 - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{1}{4} (e^2 + 1) u^3 \cong 2.097 u^3$$

## QUESITO 5

Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di  $7^\circ$ . Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di  $13^\circ$ . Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?



Al primo avvistamento delle luci:  $B\hat{A}V = 7^\circ$ ; da A a B trascorrono 3 minuti;  $C\hat{B}V = 13^\circ$ ; Dobbiamo calcolare il tempo in minuti che impiega l'aereo a passare da B a C (esattamente sopra Venezia).

Indichiamo con  $t$  il tempo in minuti impiegato per passare da B a C.

$$CV = AC \cdot \operatorname{tg}7^\circ = BC \cdot \operatorname{tg}13^\circ; \text{ ma, essendo la velocità costante: } \frac{AB}{3} = \frac{BC}{t} \Rightarrow BC = \frac{t \cdot AB}{3}$$

$$\text{Ma } AC = AB + BC = AB + \frac{t \cdot AB}{3} = AB \left(1 + \frac{t}{3}\right); \text{ quindi, da } AC \cdot \operatorname{tg}7^\circ = BC \cdot \operatorname{tg}13^\circ:$$

$$AB \left(1 + \frac{t}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}7^\circ = \frac{t \cdot AB}{3} \cdot \operatorname{tg}13^\circ \Rightarrow \frac{1}{3}(3 + t) \cdot \operatorname{tg}7^\circ = \frac{1}{3}t \cdot \operatorname{tg}13^\circ \Rightarrow$$

$$t(\operatorname{tg}13^\circ - \operatorname{tg}7^\circ) = 3\operatorname{tg}7^\circ \Rightarrow t = \frac{3\operatorname{tg}7^\circ}{\operatorname{tg}13^\circ - \operatorname{tg}7^\circ} \cong 3.41 \text{ minuti} \cong 3'25''$$

## QUESITO 6

Si consideri la curva d'equazione  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$ . La curva ha asintoti? In caso affermativo, se ne determinino le equazioni.

La funzione è definita e continua su tutto  $\mathbb{R}$ , quindi potrebbe avere asintoti orizzontali e/o obliqui.

$$\text{Risulta: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty:$$

quindi non possono esserci asintoti orizzontali ma potrebbero esserci asintoti obliqui; notiamo che la funzione è un infinito del primo ordine per  $x \rightarrow \pm\infty$ , quindi è soddisfatta la condizione necessaria; essendo  $\sqrt[3]{x^3 - x} \sim x$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ , il coefficiente angolare  $m$  degli eventuali asintoti obliqui è 1.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 - x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( x \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} - x \right) =$$

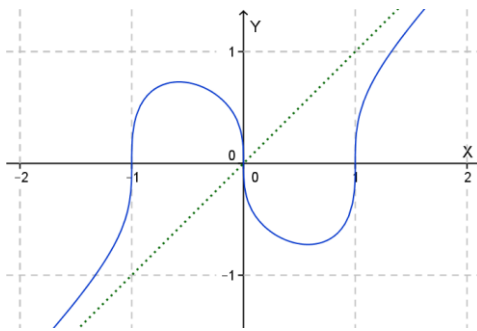
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ x \cdot \left( \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ x \cdot \left( \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{x^2} \right) \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( -\frac{1}{3x} \right) = 0 = q$$

Abbiamo usato il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow P} \left[ \frac{(1+f(x))^k - 1}{x} = k \right] \text{ se } f(x) \rightarrow \infty \text{ per } x \rightarrow P \text{ da cui segue che: } (1+f(x))^k - 1 \sim kx.$$

Pertanto la curva ammette per  $x \rightarrow \pm\infty$  l'asintoto obliquo di equazione:  $y = x$ .

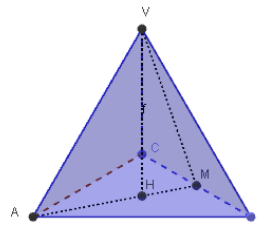
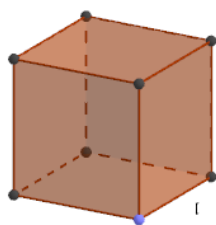
Forniamo, anche se non richiesto, il grafico della funzione.



## QUESITO 7

Un cubo di legno di pioppo (densità  $\rho_1 = 0,385 \text{ g/cm}^3$ ) ed un tetraedro regolare di cristallo ( $\rho_2 = 3,33 \text{ g/cm}^3$ ) hanno entrambi lo spigolo  $l = 5 \text{ cm}$ . Quale dei due ha la massa maggiore?

Sia  $l$  lo spigolo dei due solidi.



$$V(\text{cubo}) = l^3 = 125 \text{ cm}^3$$

$$V(\text{tetraedro}) = \frac{1}{3} \text{Area}(\text{base}) \cdot h$$

L'area di base del tetraedro è quella di un triangolo equilatero:

$$\text{Area}(\text{base}) = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$h = VH = \sqrt{VM^2 - MH^2} = \sqrt{AM^2 - \left(\frac{AM}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}AM^2} = \frac{2}{3}AM\sqrt{2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

$$V(\text{tetraedro}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 125 \text{ cm}^3 \cong 14.732 \text{ cm}^3$$

Siccome  $\rho = \frac{m}{V}$   $m = \rho V$ . Quindi:

$$\text{massa(cubo)} = m_1 = \rho_1 V_1 = 0,385 \frac{g}{cm^3} \cdot 125 cm^3 \cong 48,125 g$$

$$\text{massa(tetraedro)} = m_2 = \rho_2 V_2 = 3,33 \frac{g}{cm^3} \cdot 14,732 cm^3 \cong 49,058 g$$

Quindi ha **massa maggiore** il **tetraedro** di cristallo.

### QUESITO 8

*Tommaso ha costruito un modello di tetraedro regolare e vuole colorare le 4 facce, ognuna con un colore diverso. In quanti modi può farlo se ha a disposizione 10 colori? E se invece si fosse trattato di un cubo?*

Nel caso del **tetraedro** il numero di modi per colorare le 4 facce è dato dalle combinazioni semplici di 10 oggetti a 4 a 4:

$$C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$$

Nel caso del **cubo** il numero di modi per colorare le 6 facce è dato dalle combinazioni semplici di 10 oggetti a 6 a 6:

$$C_{10,6} = \binom{10}{6} = \binom{10}{4} = C_{10,4} = 210$$

**N.B.**

$C_{10,4} = C_{10,6}$  in base alla proprietà dei coefficienti binomiali secondo cui:  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

### QUESITO 9

*Si calcoli il valore medio della funzione:*

$$f(x) = \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

*nell'intervallo  $1 \leq x \leq 4$ .*

Il valor medio richiesto è dato da:

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \frac{\int_1^4 \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx}{4-0} = \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{4} \int_1^4 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \left[ \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + \int_1^4 e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ [\sqrt{x}]_1^4 + [e^{\sqrt{x}}]_1^4 \right] = \frac{1}{2} [(2 - 1) + (e^2 - e)] = \frac{e^2 - e + 1}{2} \cong 2.84
\end{aligned}$$

### QUESITO 10

*Si controlli se la funzione  $f(x) = \operatorname{tg}x + \operatorname{sen}x + 7$ , nell'intervallo chiuso  $[0; \pi]$  verifica le ipotesi del teorema di Rolle e, in caso affermativo, si calcoli l'ascissa dei punti ove si annulla la derivata prima.*

La funzione non è continua in  $\frac{\pi}{2}$ , che appartiene all'intervallo  $[0; \pi]$  quindi il teorema di Rolle non è applicabile.