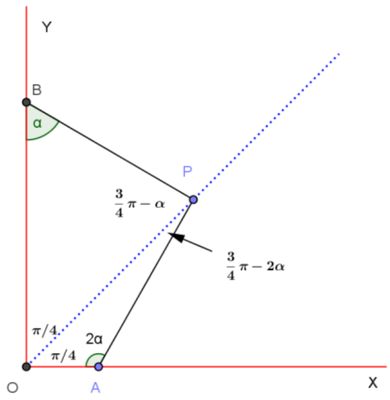
# PNI 2013 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

*E' dato un angolo retto $X\hat{O}Y$ e sulla sua bisettrice un punto P, tale che $P\hat{A}O = 2 \cdot P\hat{B}O$, essendo A e B punti, rispettivamente, di OX e di OY.*




## 1)

*Posto $P\hat{B}O = \alpha$, si calcoli il rapporto: $\frac{OA}{OB}$ e lo si esprima in funzione di $x = tg\alpha$ , controllando che risulta:*

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2\,x + 1}{2(x+1)}$$

Notiamo che OA non può annullarsi e quindi $2\alpha < \pi \quad da\ cui \quad \alpha < \frac{\pi}{2}$; inoltre deve essere: $\frac{3}{4}\pi - 2\alpha > 0 \quad da\ cui \quad \alpha < \frac{3}{8}\pi$ ; non può essere $\alpha = 0$ perché altrimenti P coinciderebbe con O ed A dovrebbe andare all'infinito. Pertanto risulta:

$$0 < \alpha < \frac{3}{8}\pi$$

Applicando il teorema dei seni ai triangoli APO e BPO si ottiene:

$$\frac{OA}{sen\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)} = \frac{OP}{sen(2\alpha)} \quad \Rightarrow \quad OA = \frac{OP \cdot sen\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)}{sen(2\alpha)}$$

$$\frac{OB}{sen\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right)} = \frac{OP}{sen(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad OB = \frac{OP \cdot sen\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right)}{sen(\alpha)}$$

Quindi:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OP\cdot sen\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)}{sen(2\alpha)}\cdot\frac{sen(\alpha)}{OP\cdot sen\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)}=\frac{sen\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)}{2\cos(\alpha)\cdot sen\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)}$$

Da cui:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{sen\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos(2\alpha)-cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\text{sen}(2\alpha)}{2\cos(\alpha)\cdot\left(sen\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos(\alpha)-cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\text{sen}(\alpha)\right)}=\frac{\cos(2\alpha)+\text{sen}(2\alpha)}{2\cos(\alpha)\cdot(\cos(\alpha)+\text{sen}(\alpha))}=\frac{\cos^2\alpha-sen^2\alpha+2sen\alpha cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2sen\alpha cos\alpha}$$

Essendo $0<\alpha<\frac{3}{8}\pi$ , risulta $cos a\neq 0$ quindi possiamo dividere numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$, ottenendo $(x=tg\alpha)$:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{\cos^2\alpha-sen^2\alpha+2sen\alpha cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2sen\alpha cos\alpha}=\frac{-tg^2\alpha+2tg\alpha+1}{2(tg\alpha+1)}=\frac{-x^2+2x+1}{2(x+1)}=f(x)$$

## 2)

*Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico $\gamma$ .*

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{-x^2+2\,x+1}{2(x+1)}}$$

N.B. La curva è una conica, poiché può essere ricondotta al polinomio di secondo grado

$2y(x+1)+x^2-2\,x-1=0$

Dal dominio si deduce che è un'iperbole.

**Dominio**: $-\infty<x<-1\quad vel\quad -1<x<+\infty$

**Simmetrie notevoli:**

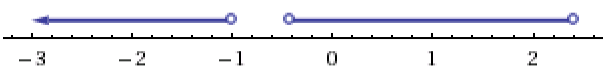
$$f(-x)=\frac{-x^2-2\,x+1}{2(-x+1)}\begin{cases}\neq f(x):\ non\ pari\\ \neq -f(x):\ non\ dispari\end{cases}$$

**Intersezioni con gli assi cartesiani:**

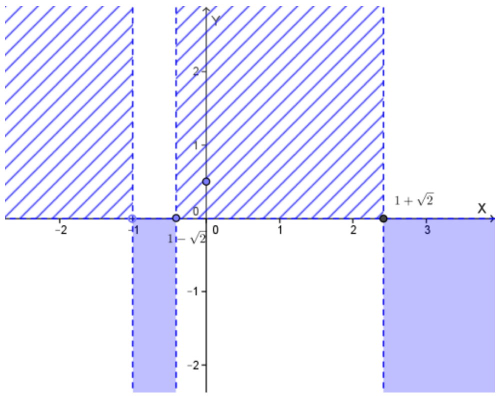
$x=0,\qquad y=\frac{1}{2}\qquad\qquad y=0,\qquad -x^2+2\,x+1=0\ \Rightarrow\ x=1\pm\sqrt{2}$

**Segno della funzione:**

$y>0$ se $\frac{-x^2+2\,x+1}{2(x+1)}>0$ se ….. $x<-1\,,\ 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$



Nel grafico seguente viene indicata la zona del piano in cui si trova il grafico della funzione.




### Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+2x+1}{2(x+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2}{2x} = \mp\infty \quad (\textit{no asintoti orizzontali})$$

$$\lim_{x\to(-1)^{\mp}} \frac{-x^2+2x+1}{2(x+1)} = \pm\infty \quad (x = 1\ \textit{asintoto verticale})$$

C'è asintoto obliquo, poiché si tratta di una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore. L'equazione di tale asintoto è $y = Q(x)$, dove $Q(x)$ è il quoziente della divisione del numeratore per il denominatore. Oppure, al solito modo:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+2x+1}{2(x+1)\cdot x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x^2+2x+1}{2(x+1)} + \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x^2+2x+1+x(x+1)}{2(x+1)}\right) =$$

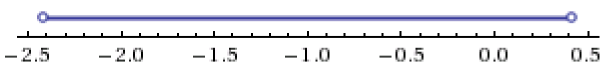
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x+1}{2(x+1)}\right) = \frac{3}{2}$$

Quindi l'asintoto obliquo ha equazione: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

### Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{2(x+1)^2}$$

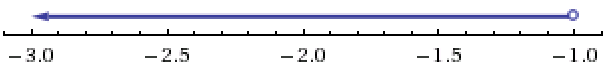
$$f'(x) > 0 \implies -x^2 - 2x + 1 > 0, \quad -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$$




La funzione è crescente per $-1-\sqrt{2} < x < -1$ e $-1 < x < -1+\sqrt{2}$, decrescente per: $x < -1-\sqrt{2} \quad e \quad x > -1+\sqrt{2}$;
abbiamo un minimo relativo per $x = -1-\sqrt{2}$ ed un massimo relativo per $x = -1+\sqrt{2}$

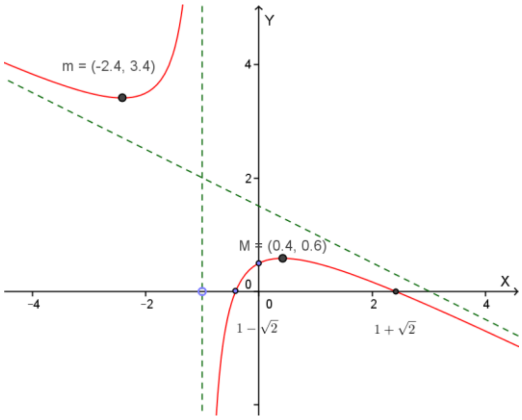
**Derivata seconda:**

$f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} > 0 \quad \Longrightarrow \quad x+1<0 \quad \Longrightarrow \quad x<-1$



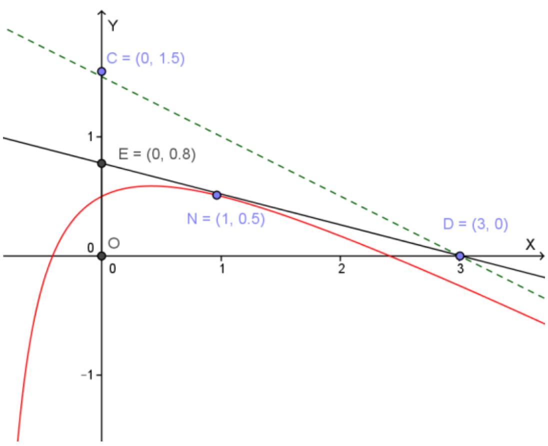

Il grafico avrà la concavità verso l'alto per $x<-1$ e verso il basso per $x>-1$

Il grafico della funzione è il seguente:




### 3)

*Si considerino i punti C e D in cui l'asintoto obliquo di $\gamma$ incontra rispettivamente l'asse y e l'asse x . Se E è il punto medio del segmento CO, si mostri che la retta DE è tangente a $\gamma$ nel punto di ascissa 1.*




Intersecando l'asintoto obliquo $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ con l'asse y e con l'asse x otteniamo:

$C=\left(0;\frac{3}{2}\right),\ D=(3;0)$

Il punto medio E di CO ha coordinate: $E=\left(0;\frac{3}{4}\right)$

La retta DE ha equazione:

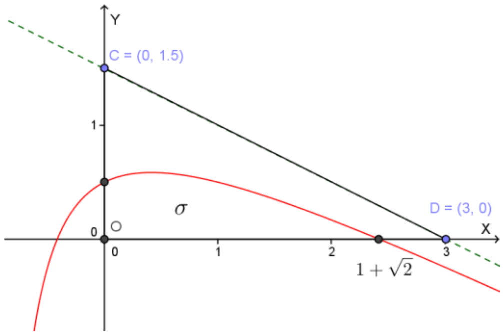
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{\frac{3}{4}}=1 \quad \Longrightarrow \quad y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$$

Il punto di $\gamma$ di ascissa 1 è $N=\left(1;\frac{1}{2}\right)$

La tangente alla curva $\gamma$ in $N$ ha coefficiente angolare $f'(1)=-\frac{1}{4}$ . Tale tangente ha quindi equazione: $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-1) \quad \Longrightarrow \quad y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$ che coincide con la retta DE.

## 4)

*Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo COD. La probabilità che tale punto risulti interno alla regione $\sigma$ delimitata, nel primo quadrante, da $\gamma$ e dagli assi medesimi è maggiore o minore del $50\%$? Si illustri il ragionamento seguito.*




La probabilità richiesta è uguale al rapporto tra l'area della regione σ e quella del triangolo COD.

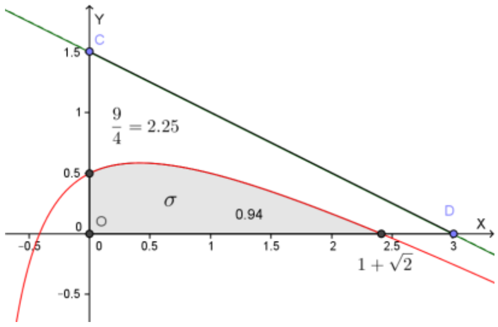
$$Area(COD) = \frac{3 \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{4}$$

$$Area(\sigma) = \int_0^{1+\sqrt{2}} f(x)dx = \int_0^{1+\sqrt{2}} \frac{-x^2+2x+1}{2(x+1)} dx$$

Per trovare una primitiva di f(x) eseguiamo la divisione del numeratore per il denominatore; otteniamo il quoziente $Q(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ed il resto $R = -2$.
Quindi:

$$\int \frac{-x^2+2x+1}{2(x+1)} dx = \int \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{2}{2(x+1)}\right) dx = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - ln|x+1| + K$$

$$\int_0^{1+\sqrt{2}} \frac{-x^2+2x+1}{2(x+1)} dx = \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - ln|x+1|\right]_0^{1+\sqrt{2}} =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{2}\right) - ln\left(2+\sqrt{2}\right) \cong 0.94.$$




Risulta quindi:

$$p = \frac{Area(\sigma)}{Area(COD)} \cong \frac{0.94}{\frac{9}{4}} = 0.42 = 42\% < 50\%.$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri