PNI 2013 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = x - 2arctgx$$

1)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

$f(x) = x - 2arctgx$

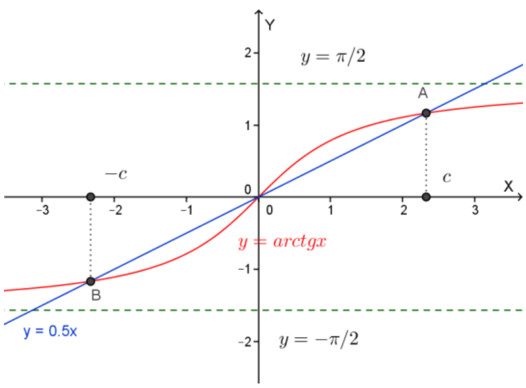
Dominio: $-\infty < x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

$f(-x) = -x - 2arxtg(-x) = -x + 2arctgx = -f(x)$
La funzione è dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

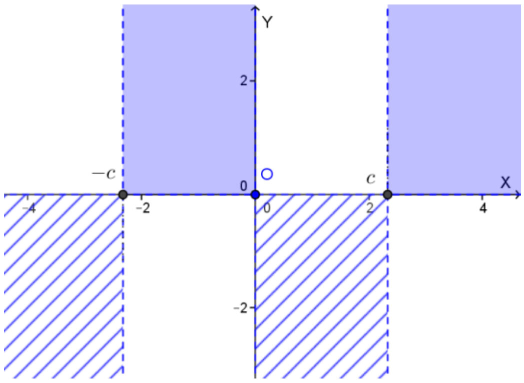
$x = 0, \quad y = 0$
$y = 0, \quad x - 2arctgx = 0 \quad \Longrightarrow \; arctgx = \frac{x}{2}$;
confrontiamo graficamente le due funzioni $y = arctgx \quad e \quad y = \frac{x}{2}$



Quindi la funzione ammette gli zeri $x = -c, \quad x = 0, \quad x = c \quad con \quad 2 < c < 3$

Segno della funzione:
$y > 0$ se $x - 2arctgx > 0 \quad \Longrightarrow \quad arctgx < \frac{x}{2}$ se $-c < x < 0, \; x > c$

Il grafico della funzione appartiene quindi alle seguenti zone del piano cartesiano:



Limiti:

$\lim_{x \to -\infty} (x - 2arctgx) = -\infty$ $\quad$ (*no asintoto orizzontale*)
$\lim_{x \to +\infty} (x - 2arctgx) = +\infty$ $\quad$ (*no asintoto orizzontale*)

Ci potrebbero essere asintoti obliqui.

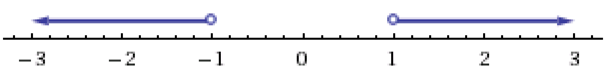
$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - 2arctgx}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} (x - 2arctgx - x) = \pi$$

Quindi per $x \to -\infty$ c'è l'asintoto obliquo di equazione: $y = x + \pi$
Per la simmetria del grafico rispetto all'origine, avremo anche asintoto obliquo per $x \to +\infty$ di equazione:
$y = x - \pi$ (simmetrica di $y = x + \pi$ rispetto all'origine degli assi).

Derivata prima:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0 \quad se \quad x^2 - 1 > 0 \quad cioè \quad per \quad x < -1 \quad vel \quad x > 1$$

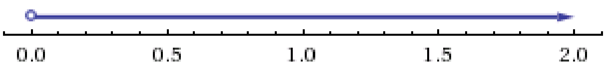


La funzione è crescente per $x < -1$ e $x > 1$, decrescente per: $-1 < x < 1$; abbiamo pertanto un massimo M relativo per $x = -1$ ed un minimo relativo m per $x = 1$:

$$f(-1) = -1 - 2arct(-1) = -1 - 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\pi}{2} \cong 0.57 \quad \Rightarrow \quad M = \left(-1; -1 + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f(1) = -f(-1) = 1 - \frac{\pi}{2} \cong -0.57 \quad \Rightarrow \quad m = \left(1; 1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

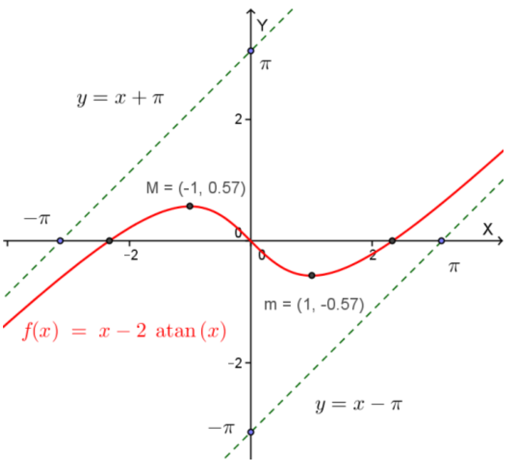
Derivata seconda:

$f''(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad x > 0$



Il grafico avrà la concavità verso l'alto per $x > 0$ e verso il basso per $x < 0$;
flesso in $x = 0$: $F = (0; 0)$.

Il grafico della funzione $f(x) = x - 2arctgx$ è quindi il seguente:



2)

La curva γ incontra l'asse x, oltre che nell'origine, in altri due punti aventi ascisse opposte. Detta ξ l'ascissa positiva, si dimostri che $1 < \xi < \pi$ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

Nel punto precedente abbiamo visto che γ incontra l'asse delle x in:

$x = -c, \quad x = 0, \quad x = c \quad\quad con \quad 2 < c < 3$

Quindi, posto $\xi = c$ è verificato che $1 < \xi < \pi$.
Dobbiamo trovare un valore approssimato di ξ con due cifre decimali esatte.

La funzione $f(x) = x - 2arctgx$ è continua nell'intervallo $[1; \pi]$ ed assume agli estremi valori di segno opposto:
$f(1) \cong -0.57 < 0 \qquad f(\pi) \cong \pi > 0$
La funzione ammette derivata prima e seconda continue in tutto il suo dominio ed in particolare la derivata seconda, nell'intervallo dato, ha segno costante:

$f''(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad x > 0 \quad\quad quindi\ f''(x) > 0 \quad in \quad [1; \pi] = [a; b]$; in tale intervallo risulta poi: $f(a) \cdot f''(x) < 0$ quindi possiamo applicare il metodo delle tangenti con punto iniziale $x_0 = b = \pi$.

Applichiamo la seguente formula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Poniamo $arctg(x) = \tan^{-1}(x)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2\tan^{-1}(x_n)}{1 - \frac{2}{x_n^2+1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

where $f(x) = x - 2\tan^{-1}(x)$

$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1}$

$$x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x - 2arct(x)}{1 - \frac{2}{x^2+1}} = x - \frac{\left(x - 2arct(x)\right) \cdot (x^2+1)}{x^2-1} \quad da\ cui:$$

$$x \leftarrow \frac{x(x^2-1) - \left(x - 2arct(x)\right) \cdot (x^2+1)}{x^2-1} = g(x)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = g(x_0) = g(\pi) \cong 2.386$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = g(x_1) = g(2.386) \cong 2.332$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = g(x_2) = g(2.386) \cong 2.331$$

Quindi: ξ con due cifre decimali esatte è: $\xi = 2.33$ (per difetto)

N.B.

Con il metodo delle tangenti sono sufficienti 2 iterazioni per avere due cifre decimali esatte; con metodo di bisezione ne occorrono 8:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [c_n, b_n] & \operatorname{sgn}(f(c_n)) = \operatorname{sgn}(f(a_n)) \\ [a_n, c_n] & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

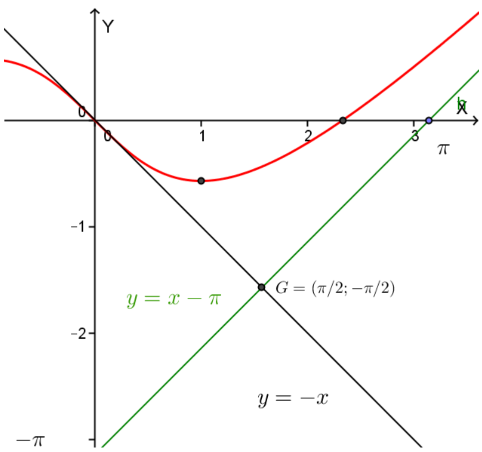
where $f(x) = x - 2\tan^{-1}(x)$

steps	a	function value	b	function value
0	1.	$-0.\times 10^{-1}$	3.14	0.62
1	2.07	-0.17	3.14	0.62
2	2.07	-0.17	2.60	0.19
3	2.07	-0.17	2.34	$0.\times 10^{-3}$
4	2.20	-0.09	2.34	$0.\times 10^{-3}$
5	2.27	-0.04	2.34	$0.\times 10^{-3}$
6	2.30	-0.02	2.34	$0.\times 10^{-3}$
7	2.32	$-0.\times 10^{-3}$	2.34	$0.\times 10^{-3}$
8	2.33	$0.\times 10^{-3}$	2.33	$0.\times 10^{-3}$

3)

Si scriva l'equazione della tangente a γ nel suo punto di flesso, si verifichi che essa risulta perpendicolare ad entrambi gli asintoti e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con uno degli asintoti e l'asse x .

La tangente alla curva γ in $F = (0;0)$ ha coefficiente angolare $f'(0) = -1$. Tale tangente ha quindi equazione: $y = -x$ che è perpendicolari agli asintoti, che hanno equazioni $y = x + \pi$ e $y = x - \pi$

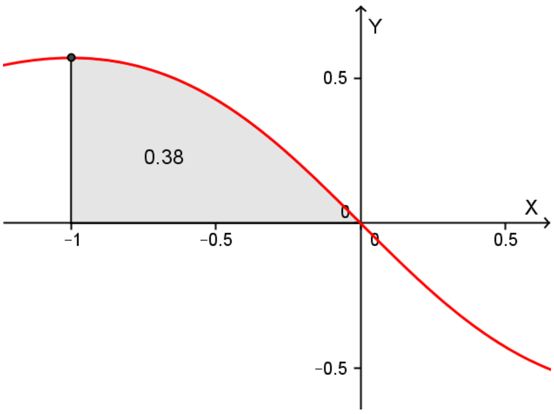


L'intersezione tra le rette $y = -x$ e $y = x - \pi$
è $G = \left(\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$.
Il triangolo richiesto ha base π e altezza $\frac{\pi}{2}$, quindi la sua area è:

$$Area(triangolo) = \frac{\pi \cdot \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi^2}{4}\ u^2$$

4)

Si calcoli l'area della regione di piano, delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo chiuso $[-1;\ 0]$.



$$Area = \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (x - 2arctgx)\, dx$$

Calcoliamo per parti $\int arctgx\, dx$:

$$\int arctgx\, dx = \int 1 \cdot arctgx\, dx = xarctgx - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2} ln(1+x^2) + k$$

Quindi:

$$Area = \int_{-1}^{0} (x - 2arctgx)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2xarctgx + ln(1+x^2)\right]_0^1 =$$
$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - 2arct(-1) + ln2\right) = -\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} - ln2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - ln2\right)\, u^2 \cong 0.38\, u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri