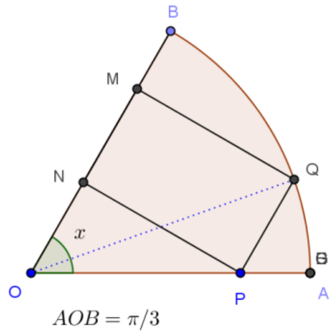
PNI 2013 SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

E' dato il settore circolare AOB, di centro O, raggio r e ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Si inscriva in esso il rettangolo PQMN, con M ed N sul raggio OB, Q sull'arco AB e P su OA. Si determini l'angolo $Q\hat{O}B = x$, affinché il perimetro del rettangolo sia massimo.



Deve essere $2p(PQMN) = max$

$Q\hat{O}B = x$.

Se $Q \equiv B \quad x = 0$; se $Q \equiv A \quad x = \frac{\pi}{3}$: quindi $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

Determiniamo i lati del rettangolo.

$MQ = OQ \cdot senx = r\ senx = PN$

Risulta: $P\hat{O}Q = \frac{\pi}{3} - x$, $O\hat{P}Q = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$

Quindi, per il *Teorema dei seni* applicato al triangolo OPQ, risulta:

$$\frac{PQ}{sen\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} = \frac{OQ}{sen\left(\frac{2}{3}\pi\right)} \quad \Longrightarrow \quad PQ = \frac{OQ \cdot sen\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{sen\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{r \cdot \left(sen\frac{\pi}{3}cosx - cos\frac{\pi}{3}senx\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}cosx - \frac{1}{2}senx\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$PQ = \frac{r \cdot \left(\sqrt{3}cosx - senx\right)}{\sqrt{3}} = MN$$

Il perimetro del rettangolo è quindi:

$$2p(PQMN) = 2PN + 2MN = 2\,r\,senx + 2 \cdot \frac{r \cdot \left(\sqrt{3}cosx - senx\right)}{\sqrt{3}} = max\ se\ lo\ \text{è}:$$

$$z = senx + \frac{\left(\sqrt{3}cosx - senx\right)}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}cosx + \left(\sqrt{3}-1\right)senx}{\sqrt{3}} = max\ se\ lo\ \text{è}$$

$$y = \sqrt{3}cosx + \left(\sqrt{3}-1\right)senx$$

Pertanto il perimetro del rettangolo è massimo quando è massima la funzione

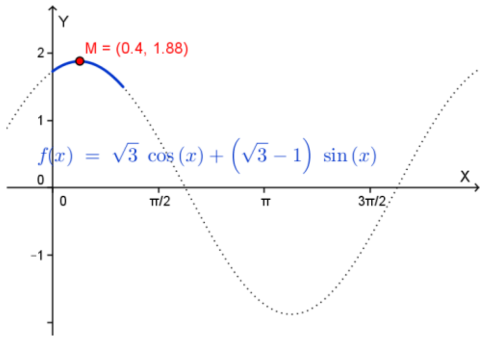
$f(x) = \sqrt{3}cosx + (\sqrt{3}-1)senx$ nell'intervallo $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$.

$f'(x) = -\sqrt{3}senx + \left(\sqrt{3}-1\right)cosx = 0 \quad se \quad tgx = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$

$x_0 = arctg\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cong 0.40\,rad \cong 22.9°$ (notiamo che x_0 è nell'intervallo $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$)

$f'(x) \ge 0 \; se \; tgx \le \frac{3-\sqrt{3}}{3} \; quindi \; per \; 0 \le x \le x_0$

La funzione (quindi il perimetro del rettangolo) cresce in $0 \le x < x_0$ e decresce in $x_0 < x < \frac{\pi}{3}$; ha massimo per $x = x_0 = arctg\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$

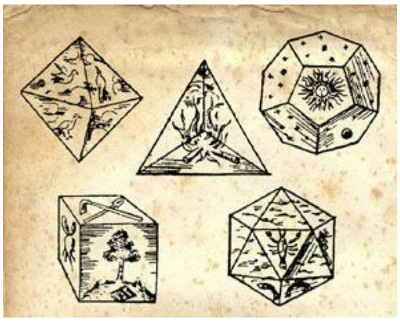


QUESITO 2

*Quali sono i poliedri regolari? Perché sono detti anche **solidi platonici**?*

I poliedri regolari (detti **solidi platonici**) sono **5,** e le loro facce possono essere solo triangoli equilateri, quadrati o pentagoni regolari.

Il termine **Solidi Platonici** è dovuto al fatto che Platone ne dà una dettagliata descrizione nel dialogo "**Timeo**". Platone associa ogni elemento a un solido regolare:
la **Terra** è associata all'**Esaedro (**il **Cubo**);
l'**Acqua** si associa all'**Icosaedro;**
all'**Aria** si associa l'**Ottaedro;**
al **Fuoco** si associa il **Tetraedro.**
Platone fa solo un breve cenno al **Dodecaedro:** "il dio se ne servì per decorare l'universo"; nel **Fedone** afferma che il Dodecaedro fosse la forma dell'universo.



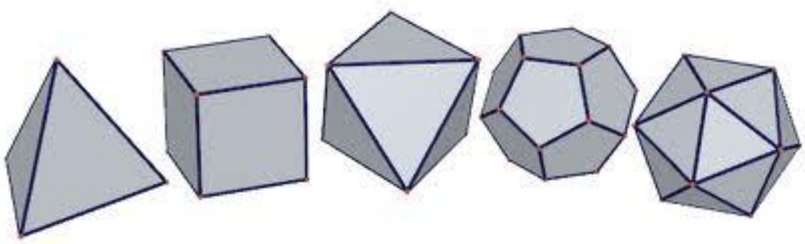
Vediamo come mai **ci sono solo 5 poliedri regolari**.

Poiché in ogni vertice di un poliedro devono convergere almeno tre facce (non complanari), la somma dei loro angoli deve essere inferiore ad un angolo giro.
Le facce possono essere solo triangoli equilateri (**tetraedro, ottaedro, icosaedro**), quadrati (**esaedro o cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).

Con tre facce esagonali avremmo come somma almeno 120°x3=360°, quindi non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.

Si hanno infatti le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli (equilateri): le facce degli angoloidi possono essere 3 (3x60°=180°<360°), 4 (4x60°=240°<360°), 5 (5x60°=300°<360°), ma non di più: con 6 facce avremmo 6x60°=360° che non è minore di 360°.
   Abbiamo quindi tre poliedri regolari con le facce triangolari: **il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.**
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 (3x90°=270°, ma 4x90°=360°): in questo caso si ha l'**esaedro (il cubo).**
3. Se le facce del poliedro sono pentagoni (regolari), ogni angoloide può avere al massimo 3 facce (3x108°=324°): in questo caso si ha il **dodecaedro regolare.**
4. Non possono esistere poliedri regolari le cui facce abbiamo più di 5 lati (per esempio già con l'esagono avremmo 3x120°=360°).



QUESITO 3

Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$x = \frac{1}{2} log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

Nel punto P di ordinata $y = 2$.

Con $y = 2$ otteniamo $x = \frac{1}{2}log3$, quindi P ha coordinate: $P = \left(\frac{1}{2}log3; 2\right)$
La tangente in P ha equazione: $x - \frac{1}{2}log3 = x'(2)(y-2)$

$x' = \frac{1}{2} \cdot \frac{D\left(\frac{y+1}{y-1}\right)}{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{2}{(y-1)^2}}{\frac{y+1}{y-1}} = -\frac{1}{y^2-1} \quad \Rightarrow \quad x'(2) = -\frac{1}{3}$. Quindi la tangente in P ha equazione: $x - \frac{1}{2}log3 = -\frac{1}{3}(y-2) \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}log3$

N.B.

Troviamo l'inversa di $x = \frac{1}{2} log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$; $2x = log\left(\frac{y+1}{y-1}\right) \implies e^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \quad e^{2x}(y-1) = y+1$

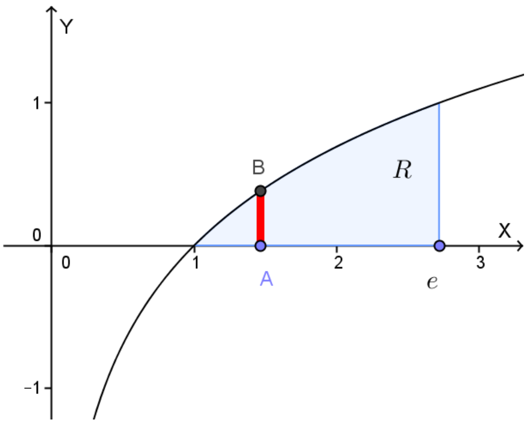
$$y(e^{2x}-1) = 1 + e^{2x} \qquad \implies \quad y = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

Trovare la tangente a $= \frac{1}{2} log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$ in $P = \left(\frac{1}{2} log3; 2\right)$ equivale a trovare la tangente a $y = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ in $P' = \left(\frac{1}{2} log3; 2\right)$, che è $y - 2 = f'(\frac{1}{2} log3)\left(x - \frac{1}{2} log3\right)$ equivalente a:

$y - 2 = -3\left(x - \frac{1}{2} log3\right) \quad \implies \quad y = -3x + \frac{3}{2} log3 + 2$ che è uguale alla retta trovata prima: $x = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} log3.$

QUESITO 4

Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f\ (x) = ln\, x$ e dall'asse x sull'intervallo [1, e]. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura dell'altezza del solido è data da $h(x) = x$. Quale sarà il volume del solido?



Il volume infinitesimo dV è dato da $dV = S(x) \cdot h = (f(x) \cdot dx) \cdot h(x) = (lnx) \cdot x\, dx$ quindi:

$$V = \int_1^e x\, lnx\, dx$$

Integrando per parti cerchiamo una primitiva di $x\, lnx$:

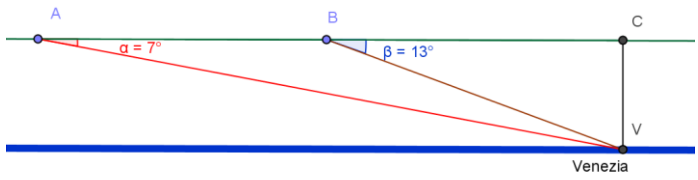
$$\int x\, lnx\, dx = \frac{x^2}{2} lnx - \int \frac{x^2}{2} . \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} lnx - \frac{1}{2} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} lnx - \frac{1}{4} x^2 + C$$

Quindi:

$V = \int_1^e x\, lnx\, dx = \left[\frac{x^2}{2} lnx - \frac{1}{4} x^2\right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(0 - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{4}(e^2 + 1)\, u^3 \cong 2.097\, u^3$

QUESITO 5

Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di 7°. Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di 13°. Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?



Al primo avvistamento delle luci: $B\hat{A}V = 7°$; da A a B trascorrono 3 minuti; $C\hat{B}V = 13°$;
Dobbiamo calcolare i tempo in minuti che impiega l'aereo a passare da B a C (esattamente sopra Venezia).

Indichiamo con t il tempo in minuti impiegato per passare da B a C.

$CV = AC \cdot tg7° = BC \cdot tg13°$; ma, essendo la velocità costante: $\frac{AB}{3} = \frac{BC}{t} \Rightarrow BC = \frac{t \cdot AB}{3}$

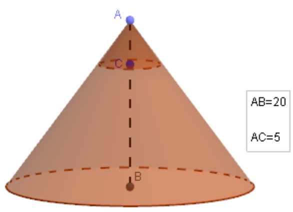
Ma $AC = AB + BC = AB + \frac{t \cdot AB}{3} = AB\left(1 + \frac{t}{3}\right)$; quindi, da $AC \cdot tg7° = BC \cdot tg13°$:

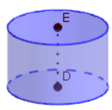
$$AB\left(1 + \frac{t}{3}\right) \cdot tg7° = \frac{t \cdot AB}{3} \cdot tg13° \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}(3 + t) \cdot tg7° = \frac{1}{3} t \cdot tg13° \quad \Rightarrow$$

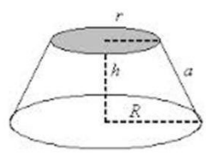
$$t(tg13° - tg7°) = 3tg7° \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3tg7°}{tg13° - tg7°} \cong 3.41\ minuti \ \cong 3'25''$$

QUESITO 6

Un cono di nichel (densità $\rho_1 = 8{,}91\ \frac{g}{cm^3}$*) ha il raggio di base di* $15\ cm$ *e l'altezza di* $20\ cm$*. Da questo cono se ne taglia via un altro, avente l'altezza di* $5\ cm$*, che viene sostituito da un cilindro di alluminio (densità* $\rho_2 = 2{,}70\ \frac{g}{cm^3}$*), che ha la stessa altezza del cono piccolo e la base uguale alla base minore del tronco di cono residuo. Si dica se la massa* m_2 *del solido così ottenuto è maggiore o minore di quella* m_1 *del cono di partenza.*







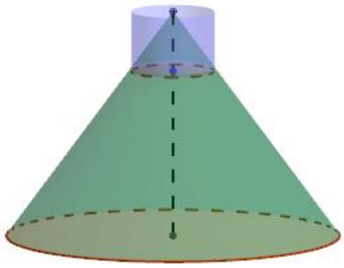
Siccome il cono piccolo ha l'altezza pari ad ¼ dell'altezza del cono grande, anche il suo raggio di base sarà ¼ del raggio di base del cono grande: $r = \frac{15}{4}\ cm$; tale raggio sarà anche il raggio di base del cilindro. L'altezza del cilindro è uguale a quella del cono piccolo, quindi $h = 5\ cm$.

$V(cilindro) = \pi r^2 h = 3 \cdot V(cono\ piccolo)$

$$raggio(cono\ piccolo) = r = \frac{1}{4} raggio(cono\ grande) = \frac{1}{4} R$$
$$h(cono\ piccolo) = h = \frac{1}{4} h(cono\ grande) = \frac{1}{4} H$$
$$V(cono\ piccolo) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{4}R\right)^2 \left(\frac{1}{4}H\right) = \frac{1}{64} V(cono\ grande)$$

$$Volume(tronco\ di\ cono) = V(cono\ grande) - V(cono\ piccolo) = \frac{63}{64} V(cono\ grande)$$

Quindi:
$$V(cilindro) = 3 \cdot V(cono\ piccolo) = \frac{3}{64} V(cono\ grande)$$



Ricordiamo che $\rho = \frac{m}{V}$ $\quad m = \rho V$. Quindi:

$$m_2 = m(tronco + cilindro) = m(tronco) + m(cilindro) = \rho_1 \cdot V(tronco) + \rho_2 \cdot V(cilindro)$$

$$m_2 = \rho_1 \cdot \frac{63}{64} V(cono\ grande) + \rho_2 \cdot \frac{3}{64} V(cono\ grande) = \frac{63\rho_1 + 3\rho_2}{64} \cdot V(cono\ grande) =$$

$$m_2 = \frac{63 \cdot 8{,}91\ \frac{g}{cm^3} + 3 \cdot 2{,}70\ \frac{g}{cm^3}}{64} \cdot V(cono\ grande) = 8.897\ \frac{g}{cm^3} \cdot V(cono\ grande)$$

$$m_1 = m(cono\ grande) = 8{,}91\ \frac{g}{cm^3} \cdot V(cono\ grande)$$

Pertanto: $m_2 < m_1$

SECONDO METODO

Siccome il cono piccolo ha l'altezza pari ad ¼ dell'altezza del cono grande, anche il suo raggio di base sarà ¼ del raggio di base del cono grande: $r = \frac{15}{4}\ cm$; tale raggio sarà anche il raggio di base del cilindro. L'altezza del cilindro è uguale a quella del cono piccolo, quindi $h = 5\ cm$.

$V(cilindro) = \pi r^2 h = 3 \cdot V(cono\ piccolo)$

$$V(cilindro) = \pi \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^2 \cdot 5\ cm^3 = \frac{1125}{16}\pi\ cm^3 \cong 221\ cm^3$$

$$m(cilindro) = \rho_2 \cdot V(cilindro) \cong 2{,}70\ \frac{g}{cm^3} \cdot 221\ cm^3 \cong 597\ g$$

$$V(cono\ piccolo) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\ V(cilindro) \cong \frac{1}{3} \cdot 221\ cm^3 \cong 74\ cm^3$$

$$m(cono\ piccolo) = \rho_1 \cdot V(cono\ piccolo) \cong 8{,}91\ \frac{g}{cm^3} \cdot 74\ cm^3 \cong 659\ g$$

Siccome:

$m(cono\ piccolo) > m(cilindro)$ allora la massa m_1 del cono grande (di nichel) è maggiore della massa la massa m_2 del solido composto dal tronco di cono (di nichel) più il cilindro (di alluminio): $m_2 < m_1$.

QUESITO 7

Tenuto conto che:

$$ln3 = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

si calcoli un'approssimazione di $ln3$*, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.*

Calcoliamo un valore approssimato dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

usando (per esempio) il **metodo dei rettangoli**.

Indichiamo con s_n la somma dei rettangoli "inscritti" con S_n la somma dei rettangoli "circoscritti". La base di ciascuno dei rettangoli è data da (1-0)/n=1/n.

Si avranno le seguenti espressioni:

$$s_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

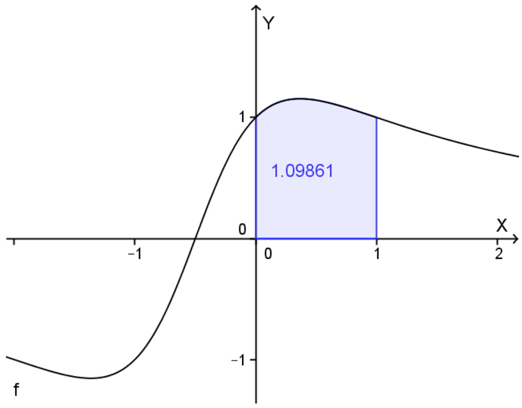
$$S_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

Per esempio con **n=5** si ha: $\boldsymbol{s_n \cong 1.094}$ **e** $\boldsymbol{S_n \cong 1.197}$

Quindi:

$$I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \cong \frac{1.094+1.197}{2} \cong 1.15 \cong ln3$$

Osserviamo che $ln3 = 1.09861$ ...



Utilizzando il **metodo dei trapezi** avremmo:

$$I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \cong \frac{1}{n}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)\right] \cong 1.09418 \cong 1.094 \cong ln3$$

che fornisce, come noto, una migliore approssimazione.

QUESITO 8

Si consideri l'equazione:

$$4x^3 - 14x^2 + 20x - 5 = 0$$

Si dimostri che essa per $0 < x < 1$ *ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.*

Consideriamo la funzione $f(x) = 4x^3 - 14x^2 + 20x - 5$; essa è continua (e derivabile) nell'intervallo $[0; 1]$ e risulta:
$f(0) = -5 < 0 \quad ed \quad f(1) = 5 > 0$

Per il *Teorema degli zeri* la funzione si annulla almeno una volta *per* $0 < x < 1$.

Dimostriamo che in tale intervallo la soluzione è unica.

$$f'(x) = 12x^2 - 28x + 20 > 0 \quad \forall x, \qquad poich\grave{e} \quad \Delta < 0$$

La funzione è quindi sempre crescente, quindi la soluzione è unica.

Calcoliamo un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

$f''(x) = 24x - 28 > 0 \quad se \quad x > \dfrac{28}{24} > 1$

Quindi nell'intervallo $[0; 1]$ la derivata seconda è sempre negativa (ha segno costante).

*Possiamo quindi utilizzare il **metodo delle tangenti**.*

Notiamo che, posto $[a; b] = [0; 1]$, risulta: $f(a) \cdot f''(x) > 0$ per ogni x dell'intervallo, quindi dobbiamo assumere come punto iniziale nella formula iterativa di Newton il punto $a = 0$.

Essendo $f(a) \cdot f''(x) > 0 \; in \; [a, b] = [0; 1]$ dobbiamo assumere come punto iniziale di iterazione $x_0 = a = 0$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f(x) = 4x^3 - 14x^2 + 20x - 5 \qquad f'(x) = 12x^2 - 28x + 20$

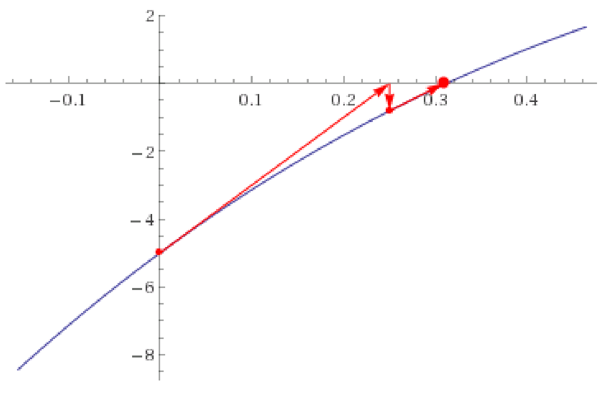
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{-5}{20} = 0.2500$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.25 - \frac{f(0.25)}{f'(0.25)} \cong 0.3091$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.3091 - \frac{f(0.3091)}{f'(0.3091)} \cong 0.3121$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.3121 - \frac{f(0.3121)}{f'(0.3121)} \cong 0.3121$$

Quindi il valore approssimato della radice con due cifre decimali esatte è: 0.31.

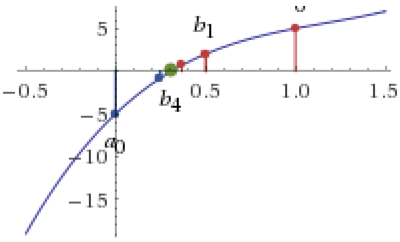


Con il metodo di bisezione abbiamo lo stesso risultato dopo 4 iterazioni.

$c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [c_n, b_n] & \mathrm{sgn}(f(c_n)) = \mathrm{sgn}(f(a_n)) \\ [a_n, c_n] & \text{(otherwise)} \end{cases}$

where $f(x) = 4x^3 - 14x^2 + 20x - 5$



steps	a	function value	b	function value
0	0	−5	1.	0.
1	0	−5	0.5	0.
2	0.25	−0.8	0.5	0.
3	0.25	−0.8	0.37	$0.\times 10^{-1}$
4	0.31	$0.\times 10^{-2}$	0.31	$0.\times 10^{-2}$

Con il metodo del **punto fisso (o del punto unito o delle approssimazioni successive):**

$4x^3 - 14x^2 + 20x - 5 = 0$ intervallo $[a, b] = [0; 1]$;

Per risolvere l'equazione $f(x) = 0$, consideriamo l'equazione:

$$\boldsymbol{g(x) = x - f(x)}$$

La soluzione α dell'equazione $f(x) = 0$ (che supponiamo sia unica in un dato intervallo) è tale che $f(\alpha) = 0$, ma allora $\boldsymbol{g}(\alpha) = \alpha - \boldsymbol{f}(\alpha) = \alpha - 0 = \alpha$. Cioè:

se α è soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ lo è anche dell'equazione $\boldsymbol{g(x) = x}$ **(**da questa espressione deriva il termine **punto unito,** nel senso che y=x).

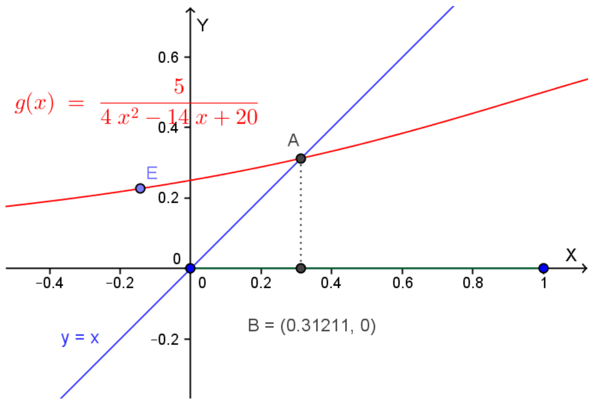
Trasformiamo l'equazione $4x^3 - 14x^2 + 20x - 5 = 0$:

$$x(4x^2 - 14x + 20) = 5 \qquad \Rightarrow x = \frac{5}{4x^2 - 14x + 20} = g(x)$$

Quindi l'equazione di partenza può essere scritta nella forma:

$$x_{n+1} = \frac{5}{4x_n{}^2 - 14x_n + 20}$$

Nel nostro caso si ha la seguente situazione grafica (cui si perviene dopo uno studio sommario di $g(x) = \frac{5}{4x^2-14x+20}$.



Quindi α è l'ascissa del punto A di intersezione tra le curve $y = g(x)$ e $y = x$.

Quindi, trasformando l'equazione $f(x) = 0$ nella forma $x = g(x)$, partendo da un punto iniziale x_0 , utilizzando la formula $x_{n+1} = g(x_n)$ si ottengono delle approssimazioni successive della radice dell'equazione $f(x) = 0$.

Quindi $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sono delle approssimazioni successive della soluzione α dell'equazione $f(x) = 0$ con α tale che 0< $\alpha < 1$ ed inoltre, al crescere di n, $x_{n+1} = g(x_n)$ tende alla radice α dell'equazione $f(x) = 0$.

Ricordiamo la seguente:

Condizione sufficiente per la convergenza:

*Se g(x) è derivabile in nell'intervallo [a; b] ed in tale intervallo risulta |g'(x)|<1, allora esiste un unico punto unito α nell'intervallo e la successione $g(x_n)$ converge ad α per ogni approssimazione iniziale $x_0 \in [a; b]$; il punto $(\alpha; \alpha)$ è detto **attrattore**.*

Nel nostro caso $g(x) = \frac{5}{4x^2-14x+20}$, $x_0 = 1.3$, $[a; b] = [0; 1]$

Risulta: $|g'(x)| < 1$ quando

$\frac{5}{2}\left|\frac{4x-7}{(2x^2-7x+10)^2}\right| < 1$ che si verifica essere sempre verificata; quindi in $[0; 1]$ abbiamo una sola radice.

Assumiamo come punto iniziale $x_0 = 0.5$

$x_1 = g(x_0) = g(0.5) = 0.35714$
$x_2 = g(x_1) = g(0.35714) = 0.32237$
$x_3 = g(x_2) = g(0.32237) = 0.31442$
$x_4 = g(x_3) = g(0.31442) = 0.31262$

Quindi il valore approssimato della radice con due cifre decimali esatte è: 0.31.

QUESITO 9

Lanciando due dadi, qual è la probabilità che esca per somma un numero primo? Quante volte occorre lanciarli perché si possa aspettare, con una probabilità $p = 80\%$ *assegnata di veder apparire almeno una volta un numero primo?*

Nel lancio di due dadi le somme possibili sono: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12. Tra questi i numeri primi sono: 2,3,5,7,11 (cioè 5 numeri primi).

I casi possibili sono 6x6=36.

I casi favorevoli sono 15:

1 per il 2 (1+1);
2 per il 3 (1+2,2+1);
4 per il 5 (1+4,2+3,3+2,4+1);
6 per il 7 (1+6,2+5,3+4,4+3,5+2,6+1);
2 per l'11 (5+6,6+5);
Quindi la probabilità che esca un numero primo è:

$$p(numero\ primo) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \cong 0.417 \cong 41.7\%$$

La probabilità che esca un numero NON PRIMO è quindi $q = 1 - p = \frac{7}{12}$
La probabilità che in n lanci esca almeno una volta un numero primo è uguale a:

$$p(almeno\ una\ volta\ numero\ primo) = 1 - p(n\ volte\ numero\ NON\ PRIMO) = 1 - q^n$$

Deve essere $1 - q^n = 80\% \quad \Rightarrow \quad 1 - q^n = 0.80 \quad \Rightarrow \quad q^n = 1 - 0.80 = 0.20$ da cui:

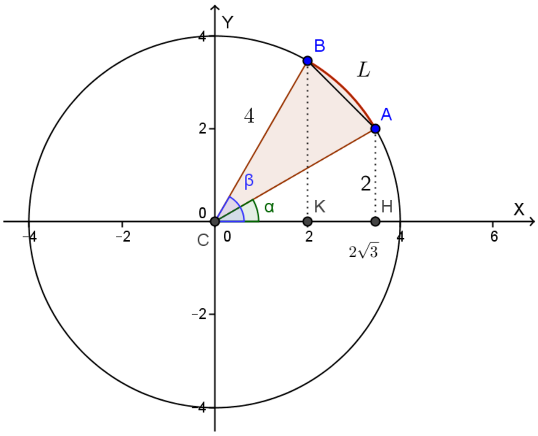
$$ln(q^n) = \ln(0.20) \quad \Rightarrow \quad n \cdot \ln(q) = \ln(0.20) \quad \Rightarrow \quad n \cdot \ln\left(\frac{7}{12}\right) = \ln(0.20)$$

$n = \frac{\ln(0.20)}{\ln\left(\frac{7}{12}\right)} \cong \frac{\ln(0.20)}{\ln(0.583)} \cong 2.99$: quindi n=3.

Occorre lanciare i due dadi almeno 3 volte perché si possa aspettare, con una probabilità $\mathrm{p} = 80\%$ assegnata di veder apparire almeno una volta un numero primo?

QUESITO 10

Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 16$ *, si calcoli la lunghezza dell'arco compreso tra i punti* $A(2\sqrt{3};\ 2)$ *e* $B(2;\ 2\sqrt{3})$*. Si scelga poi a caso un punto sulla circonferenza: si determini la probabilità che tale punto giaccia sull'arco* AB*.*



La probabilità richiesta p è data da:

$$p = \frac{lunghezza\ arco\ AB}{lunghezza\ circonferenza} = \frac{L}{2\pi R}$$

Risulta:

$$senH\hat{C}A = sen\alpha = \frac{AH}{CA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 30°$$

$$senK\hat{C}B = sen\beta = \frac{BK}{CB} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \beta = 60°$$

Quindi: $A\hat{C}B = \beta - \alpha = 30°$

Pertanto la lunghezza dell'arco AB è uguale a $\frac{3}{360} = \frac{1}{12}$ della lunghezza della circonferenza. Pertanto:

$$p = \frac{lunghezza\ arco\ AB}{lunghezza\ circonferenza} = \frac{\frac{1}{12}(2\pi R)}{2\pi R} = \frac{1}{12} \cong 0.083 = 8.3\ \%$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri