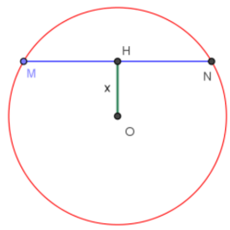
ORDINAMENTO 2013 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

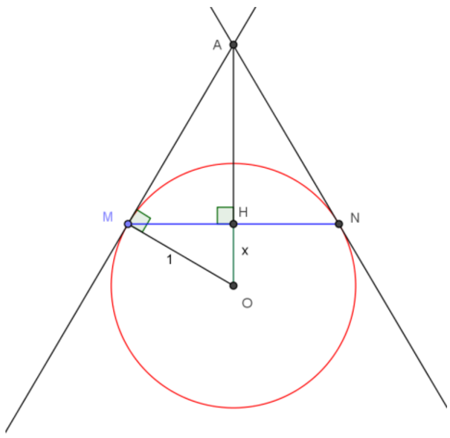
Sia data una circonferenza di centro O e raggio 1 e una sua corda MN, condotta alla distanza x da O.



1)

Si calcoli il rapporto $f(x)$ fra l'area del triangolo, formato dalla corda MN e dalle tangenti alla circonferenza in M ed N, e quella del rettangolo di lato MN, inscritto nella circonferenza, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{4x^2}$$



In base al primo teorema di Euclide risulta: AO:MO=MO:HO, quindi:

$AO = \frac{MO^2}{HO} = \frac{1}{x}$ (notiamo che possiamo considerare $0 < x < 1$)

Quindi: $AH = \frac{1}{x} - x$. Per il secondo teorema di Euclide si ha poi:

$$MH^2 = AH \cdot HO = \left(\frac{1}{x} - x\right)x = 1 - x^2, \quad da\ cui \quad MH = \sqrt{1-x^2}$$

Pertanto:

$$A(AMN) = \frac{MN \cdot AH}{2} = MH \cdot AH$$
$$A(rettangolo) = MN \cdot 2OH = 2MH \cdot 2OH = 4MH \cdot OH$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{A(AMN)}{A(rettangolo)} = \frac{MH \cdot AH}{4MH \cdot OH} = \frac{AH}{4OH} = \frac{\frac{1}{x} - x}{4x} = \boldsymbol{\frac{1-x^2}{4x^2}}$$

2)

Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\frac{1-x^2}{4x^2}} = -\boldsymbol{\frac{1}{4}} + \boldsymbol{\frac{1}{4x^2}}$$

Dominio: $x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli: f(-x) = f(x), quindi la funzione è pari (grafico simmetrico rispetto all'asse y).

Intersezioni con gli assi cartesiani: il grafico non interseca l'asse y ed interseca l'asse x nei punti di ascissa -1 e +1.

Segno della funzione: $\frac{1-x^2}{4x^2} > 0$ se $1 - x^2 > 0$ quindi per $-1 < x < 1$ (con $x \neq 0$)

Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1-x^2}{4x^2}\right) = -\frac{1}{4}$ ($y = -\frac{1}{4}$ asintoto orizzontale; non ci sono asintoti obliqui)

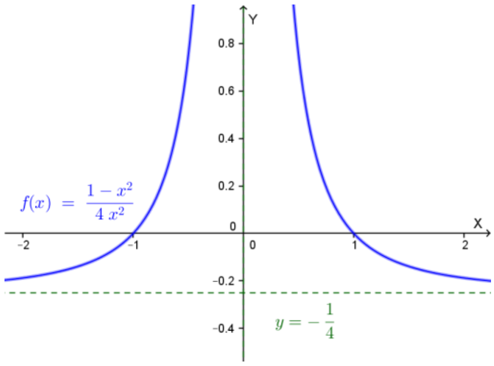
$\lim\limits_{x\to 0^\pm} \left(\frac{1-x^2}{4x^2}\right) = +\infty$ ($x = 0$ asintoto verticale)

Derivata prima:

$f'(x) = -\frac{1}{2x^3} \geq 0$ se $x < 0$

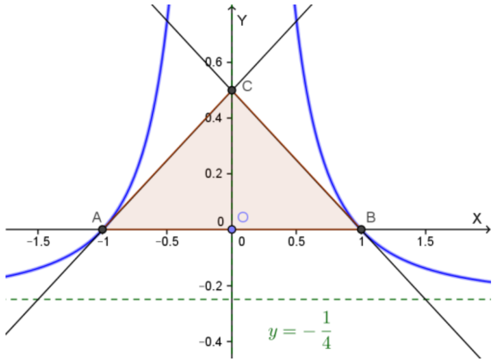
La funzione quindi cresce per $x < 0$ e decresce per $x > 0$; non ci sono massimi né minimi.
$f''(x) = \frac{3}{2x^4} > 0$ in tutto il suo dominio; il suo grafico γ ha quindi la concavità sempre rivolta verso l'alto e non ci sono flessi.

Il grafico γ della funzione è il seguente:



3)

Si scrivano le equazioni delle tangenti a γ nei punti di intersezione con l'asse x e si calcoli l'area del triangolo T che esse formano con l'asse x .



I punti di intersezione di γ con l'asse x sono: $A = (-1; 0)$ e $B = (1; 0)$.

Tangente in A: $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x+1)$

Tangente in B: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}(x-1)$

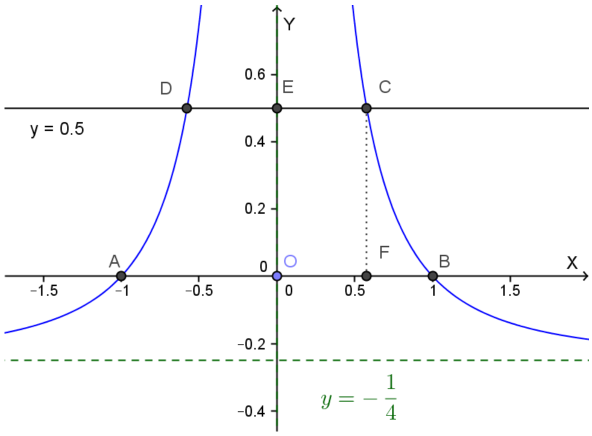
I vertici del triangolo T sono: $A = (-1; 0),\ B = (1; 0)\ e\ C = \left(0; \frac{1}{2}\right)$

L'area del triangolo è: $\boldsymbol{A(T) = \frac{AB \cdot CO}{2} = 0.5\ u^2}$

4)

Si calcoli l'area della superficie piana Σ, delimitata dalla curva γ , dall'asse x e dalla retta y =1/2 .

La superficie Σ è ABCDA:



La sua area si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\boldsymbol{A(\Sigma)} = 2A(OFCE) + 2\int_{X_C}^{1} f(x)dx$$

Calcoliamo l'ascissa di C:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1-x^2}{4x^2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{1-x^2}{4x^2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 - x^2 = 2x^2 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x_C = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{A(\Sigma)} = 2A(OFCE) + 2\int_{X_C}^{1} f(x)dx = \sqrt{\frac{1}{3}} + 2\int_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^{1} \frac{1-x^2}{4x^2}dx = \sqrt{\frac{1}{3}} + 2\int_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^{1} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^2}\right)dx =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}} + 2\left[-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4x}\right]_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^{1} = \sqrt{\frac{1}{3}} + 2\left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)\right] = \sqrt{\frac{1}{3}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\boldsymbol{\sqrt{3} - 1}\right)\boldsymbol{u^2} \cong \boldsymbol{0.73\ u^2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri