# ORDINAMENTO 2013 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

*Si consideri la funzione:*

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

## 1)

*Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico $\gamma$, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.*

**Dominio**: $-\infty < x < +\infty$

**Simmetrie notevoli:** f(-x) = f(x), quindi la funzione è pari (grafico simmetrico rispetto all'asse y).

**Intersezioni con gli assi cartesiani:**
$se\ x = 0, y = 0, se\ y = 0,\ x^2 + 1 = 1, da\ cui\ x = 0\ (doppia)$

**Segno della funzione:** $\ln(x^2 + 1) > 0$ se $x^2 + 1 > 1$ quindi per $x \neq 0$

**Limiti:**

$\lim_{x\to\pm\infty} (\ln(x^2 + 1)) = +\infty$ (non ci sono asintoti orizzontali)

Non ci sono asintoti verticali, poiché la funzione è continua su tutto l'asse reale e non ci sono asintoti obliqui, perché la funzione non è un infinito del primo ordine.

**Derivata prima:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \geq 0 \quad se\ x \geq 0$$

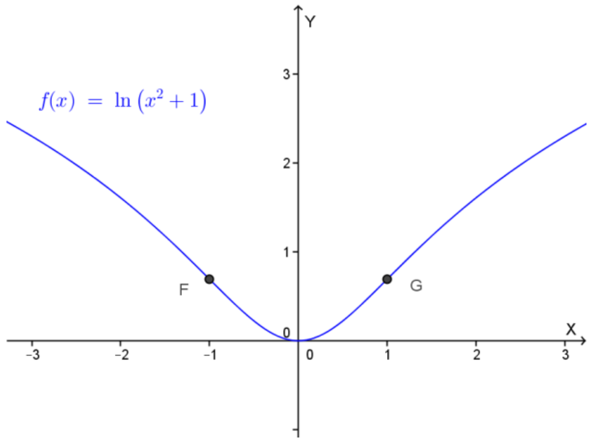
La funzione quindi decresce per $x < 0$ e cresce per $x > 0$; in x=0 abbiamo un amassimo (relativo e assoluto), che vale 0.

**Derivata seconda:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \quad se \quad -2x^2 + 2 \geq 0,\ \ cioè\ per \quad -1 \leq x \leq 1$$

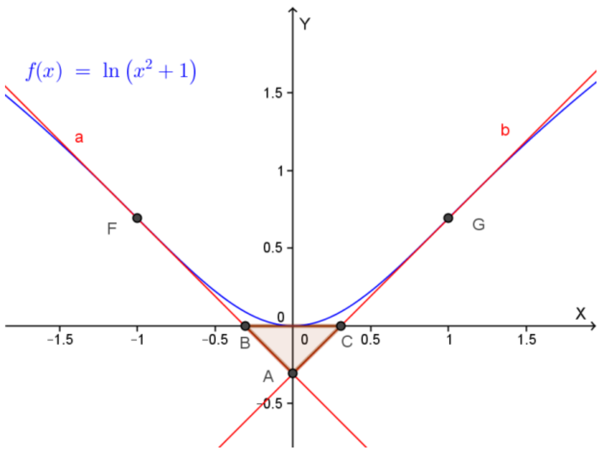
La curva ha quindi la concavità verso l'alto se $-1 < x < 1$ e verso il basso se $x < -1\ \vee\ x > 1$. Presenta flesso per $x = \pm 1$ di ordinata $y = ln2$.

Il grafico $\gamma$ della funzione è il seguente:




## 2)

*Si scrivano le equazioni delle tangenti a $\gamma$ nei punti di flesso e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse x .*




Determiniamo le tangenti nei punti di flesso $F = (-1; ln2)$ $e$ $G = (1; ln2)$.

Tangente a in F:
$y - ln2 = f'(-1)(x+1) \implies y = -(x+1) + ln2 = -x - 1 + ln2$

Tangente b in G:
$y - ln2 = f'(1)(x-1) \implies y = (x-1) + ln2 = x - 1 + ln2$

Le due tangenti si intersecano sull'asse y, in $A = (0; -1 + ln2)$

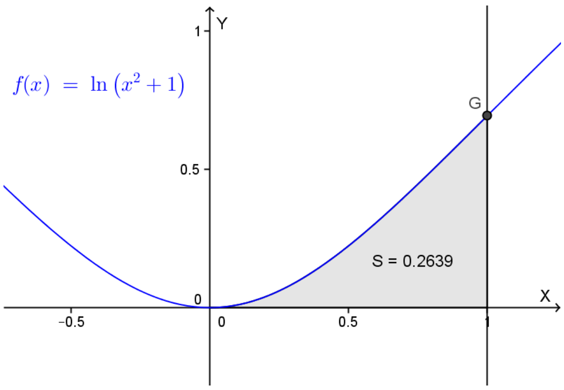
Determiniamo le intersezioni delle tangenti di flesso con l'asse x:

$B: \begin{cases} y = -x - 1 + ln2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 + ln2 \\ y = 0 \end{cases}$

Per simmetria: $C = (1 - ln2; 0)$
Il triangolo richiesto ABC ha dunque area:
$\boldsymbol{A(ABC)} = \frac{BC \cdot AO}{2} = \frac{(2 - 2ln2)|-1 + ln2|}{2} = \boldsymbol{(1 - ln2\,)^2\, u^2 \cong 0.0942\, u^2}$

## 3)

*Si calcoli l'area della superficie piana S, delimitata dalla curva $\gamma$ , dall'asse x e dalla retta di equazione x =1.*




$\boldsymbol{A(S)} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \ln(x^2 + 1)dx$

Cerchiamo una primitiva di $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ integrando per parti:

$$\int \ln(x^2 + 1)\, dx = \int (x)' \cdot \ln(x^2 + 1\,)\, dx = xln(x^2 + 1) - \int x \cdot \frac{2x}{1 + x^2} dx =$$

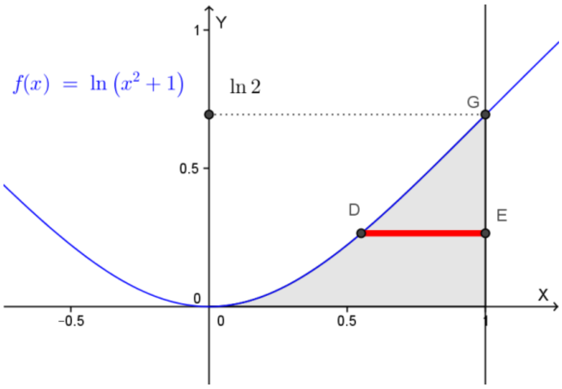
$$= xln(x^2 + 1) - 2\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx = xln(x^2 + 1) - 2\int \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} dx =$$
$$= xln(x^2 + 1) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{1 + x^2} dx = xln(x^2 + 1) - 2x + 2arctg(x) + K$$

Quindi:

$$\boldsymbol{A(S)} = \int_0^1 \ln(x^2 + 1)dx = [xln(x^2 + 1) - 2x + 2arctg(x)]_0^1 = ln2 - 2 + 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 =$$
$$= \boldsymbol{\left(ln2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right)\, u^2 \cong 0.2639\, u^2}$$

## 4)

*La superficie S è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse y , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.*




$V(\Sigma) = \int_0^{ln2} S(y)dy$ essendo S(y) l'area del triangolo equilatero di lato DE, con:

$DE = 1 - x$

Essendo $y = \ln(x^2+1)$ risulta: $e^y = x^2 + 1$ $da\ cui$ $x = \sqrt{e^y - 1}$ (… è x>0).

$$S(y) = DE^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (1-x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - 2x + x^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - 2\sqrt{e^y - 1} + e^y - 1\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(e^y - 2\sqrt{e^y - 1}\right)$$

Calcoliamo $\int \sqrt{e^y - 1}\,dy$

Ponendo $x = \sqrt{e^y - 1}$ si ottiene $y = \ln(x^2+1)$ e $dy = \frac{2x}{1+x^2}dx$ quindi:

$$\int \sqrt{e^y - 1}\,dy = \int x \cdot \frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$= 2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = 2x - 2arctg(x) + k = 2\sqrt{e^y - 1} - 2arctg\,\sqrt{e^y - 1} + k$$

Pertanto:

$$\boldsymbol{V(\Sigma)} = \int_0^{ln2} S(y)dy = \int_0^{ln2} \frac{\sqrt{3}}{4}\left(e^y - 2\sqrt{e^y - 1}\right)dy =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[e^y - 4\sqrt{e^y - 1} + 4arctg\sqrt{e^y - 1}\right]_0^{ln2} = \frac{\sqrt{3}}{4}[2 - 4 + \pi - (1)] =$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}[\pi - 3]\,u^3 \cong 0.061\,u^3}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri