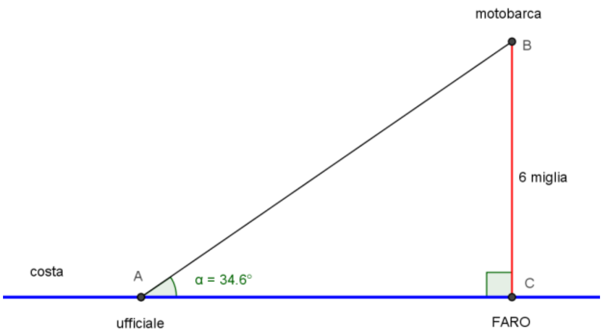
ORDINAMENTO 2013 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Un ufficiale della guardia di finanza, in servizio lungo un tratto rettilineo di costa, avvista una motobarca di contrabbandieri che dirige in linea retta, perpendicolarmente alla costa, verso un vecchio faro abbandonato. L'angolo tra la direzione della costa e il raggio visivo dell'ufficiale che guarda la motobarca è di 34,6°; il natante si trova a 6 miglia marine dal faro e si muove con una velocità di 18 nodi (miglia marine all'ora). L'ufficiale ordina di salire immediatamente in macchina, in modo da raggiungere il faro, percorrendo una strada parallela alla spiaggia, 10 minuti prima che vi approdino i contrabbandieri, per coglierli con le mani nel sacco. A che velocità media, in km/h, deve muoversi l'automezzo della guardia di finanza per arrivare nei tempi previsti? (Un miglio marino = 1853,182 m).



$v = velocità\ motobarca = 18\ nodi = 18\ miglia/h$

La motobarca deve percorrere 6 miglia, quindi, per raggiungere il faro impiega un tempo t dato da:

$$v = \frac{BC}{t} \quad \Longrightarrow t = \frac{BC}{v} = \frac{6\ miglia}{18\,\frac{miglia}{h}} = \frac{1}{3}\ h = 20\ minuti$$

La macchina della guardia di finanza deve arrivare al faro 10 minuti prima dei contrabbandieri, quindi deve impiegare 10 minuti per compiere il tratto AC.

Risulta:

$$AC = \frac{BC}{tg\alpha} = \frac{6\ miglia}{tg\ 34.6°} = \frac{6\ miglia}{0.69} = 8.696\ miglia$$

$$\textit{velocità media automezzo} = \frac{8.696\ miglia}{\frac{1}{6}h} = 52.174\ \frac{miglia}{h} = \frac{(52.174)\cdot(1853.182)\ m}{h} =$$

$$= \frac{96687.757\ \ m}{h} \cong 96.688\ \ km\ /\ h$$

QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $(1+x^2)^{\frac{1}{sen^2 x}}$ *, quando x tende a 0.*

Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^{∞}.

$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{sen^2 x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{sen^2 x}} = e$, poiché, se x tende a 0,

$(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ tende a e e $\frac{x^2}{sen^2 x}$ tende a 1; si ricordino infatti i seguenti limiti notevoli:

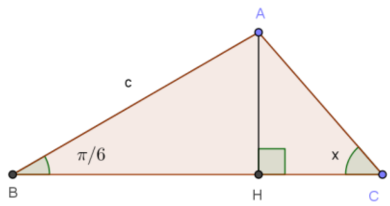
$\lim_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{sen^2 x} = 1$.

QUESITO 3

Nel triangolo ABC l'angolo in B misura $\frac{\pi}{6}$ *e quello in C misura x . Si determini l'angolo x in modo che, detta H la proiezione ortogonale di A sulla retta BC, la quantità:*

$$\frac{BC+HC}{AC}$$

risulti massima.



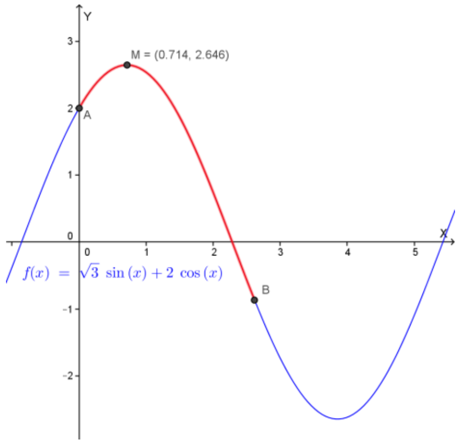
Posto $AB = c$ risulta: $AH = \frac{c}{2}$, $\quad BH = \frac{c}{2}\cdot\sqrt{3}$, $\quad \frac{AC}{sen\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{c}{sen(x)} \quad \Longrightarrow \quad AC = \frac{c}{2sen(x)}$

$HC = AC\cdot\cos(x) = \frac{c}{2sen(x)}\cdot\cos(x) = \frac{c\cdot\cos(x)}{2\ sen(x)}$, $\quad BC = BH + HC = \frac{c}{2}\cdot\sqrt{3} + \frac{c\cdot\cos(x)}{2\ sen(x)}$

$$\frac{BC+HC}{AC}=\frac{\frac{c}{2}\cdot\sqrt{3}+\frac{c\cdot\cos(x)}{2\,sen(x)}+\frac{c\cdot\cos(x)}{2\,sen(x)}}{\frac{c}{2sen(x)}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\cos(x)}{sen(x)}}{\frac{1}{2sen(x)}}=\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(x)+2\cos(x)=y$$

Si tratta quindi di trovare il massimo della funzione:

$$\begin{cases} y=\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(x)+2\cos(x) \\ 0\le x\le \frac{5}{6}\pi \end{cases}$$



Ricordiamo che l'espressione $y=a\,\mathrm{sen}(x)+b\cos(x)$ può essere scritta nella forma

$y=\sqrt{a^2+b^2}\cdot sen(x+\alpha)$, dove $tg(\alpha)=\frac{b}{a}$

$y=\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(x)+2\cos(x)=\sqrt{7}\,sen(x+\alpha)$, con $tg(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\alpha=arct\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cong 0.857$

Il massimo della funzione si ha quando $sen(x+\alpha)=1$, $x+\alpha=\frac{\pi}{2}$,

$$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{2}-arct\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cong 0.714\ rad}$$

Il massimo ella funzione è $\boldsymbol{y(0.714)}=\boldsymbol{\sqrt{7}\cdot 1\cong 2.646}$

QUESITO 4

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \log_x 2$$

nel punto P di ascissa x = 2 .

Notiamo che:

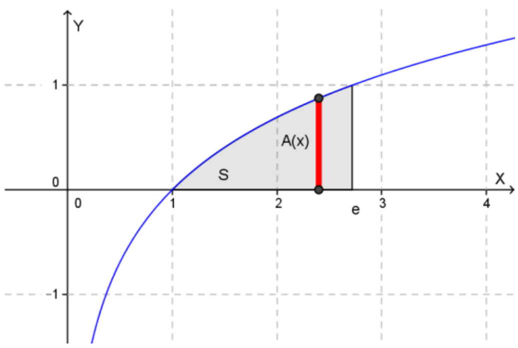
$f(x) = \log_x 2 = \frac{ln2}{\ln x}$, quindi $f'(x) = ln2\left(-\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}\right) = -\frac{\ln 2}{x\ln^2 x}$, $\quad f'(2) = m = -\frac{1}{2\ln 2}$

Quindi la tangente ha equazione:

$y - f(2) = f'(2)(x-2)$, $\quad y - 1 = -\frac{1}{2\ln 2}(x-2)$, $\quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2\ln 2}\,x + 1 + \frac{1}{ln2}}$

QUESITO 5

La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = \ln x$ e dall'asse x nell'intervallo $1 \le x \le e$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte rettangoli aventi l'altezza quadrupla della base. Si calcoli il volume di Σ.



Il volume di *Σ* si calcola mediante il seguente integrale:

$V(\Sigma) = \int_1^e A(x)dx$, essendo A(x) l'area del rettangolo con dimensioni $ln\, x \;\; e \;\; 4lnx$, quindi:

$A(x) = 4\ln^2 x$

$$\int \ln^2 x\, dx = \int (x)' \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x - \int x \cdot \left(2(lnx)\cdot\frac{1}{x}\right) dx =$$

$= x\ln^2 x - 2\int lnx\, dx = x\ln^2 x - 2\int (x)' lnx\, dx = x\ln^2 x - 2\left[x\, lnx - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\right] =$

$= x\ln^2 x - 2x\, lnx + 2x + K$ pertanto:

$\boldsymbol{V(\Sigma)} = \int_1^e A(x)dx = \int_1^e 4\ln^2 x\; dx = 4[x\ln^2 x - 2x\, lnx + 2x]_1^e = 4[e - 2e + 2e - (2)] =$

$= \boldsymbol{4(e-2)\, u^3} \cong \boldsymbol{2.873\, u^3} = \boldsymbol{V(\Sigma)}$

QUESITO 6

Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

La funzione è definita (e continua) quando $e^x - 1 \neq 0$, $x \neq 0$. Il suo dominio è quindi:

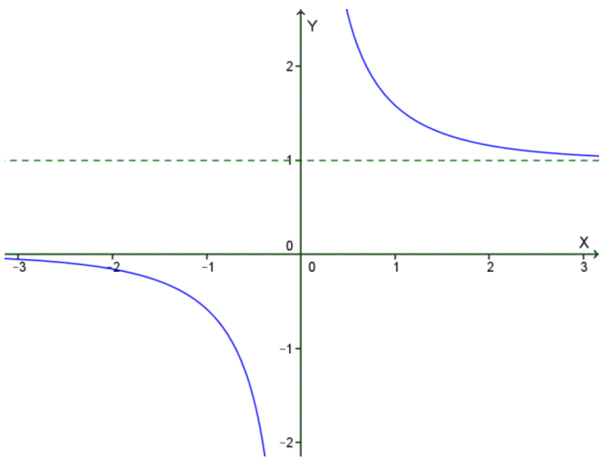
$-\infty < x < 0 \quad \vee \quad 0 < x < +\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-1} = 0$: quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1} = 1$: quindi $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$\lim_{x\to0^\pm}\frac{e^x}{e^x-1} = \pm\infty$: quindi $x = 0$ è asintoto verticale

Il grafico della funzione è il seguente:



QUESITO 7

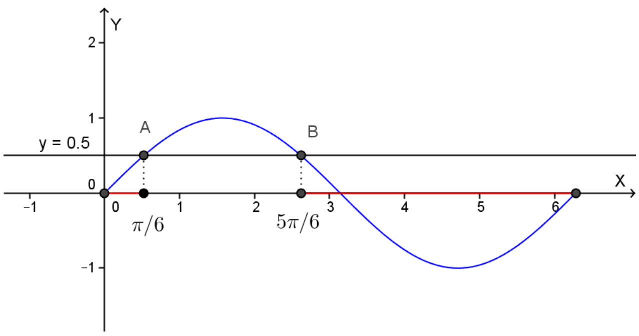
Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$y = arccos(e^{2senx-1}), \qquad \text{con} \quad 0 \le x \le 2\pi\ .$$

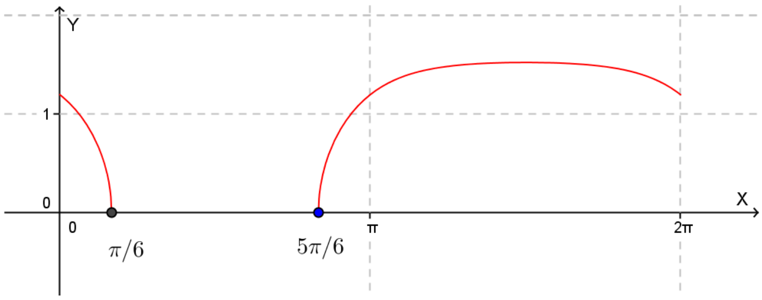
Deve essere:

$-1 \le e^{2senx-1} \le 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{2senx-1} \le 1 \quad \Longrightarrow \quad 2senx - 1 \le 0 \quad \Longrightarrow \quad senx \le \frac{1}{2}$ da cui:

$0 \le x \le \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad \frac{5}{6}\pi \le x \le 2\pi$



Il grafico della funzione data è:



QUESITO 8

Un cubo di alluminio (densità $\rho = 2{,}7\ g/cm^3$), avente lo spigolo $l\ =\ 10\ cm$, presenta all'interno una cavità a forma di cilindro equilatero, avente il raggio di lunghezza $r_c\ = 2{,}5\ cm$. Si calcoli la massa m del cubo.

Ricordando che $\rho = \frac{m}{V}$, dopo aver trovato il volume del cubo possiamo trovare la sua massa (massa del cubo senza cavità).

$V = l^3 = 1000\ cm^3, \quad massa\ cubo\ pieno = m = \rho V = (2{,}7\ g/cm^3)(1000\ cm^3) = 2700\ g$

Il cilindro equilatero di raggio r_c ha volume:

$$V(cilindro) = \pi\, r_c^2\, h = \pi\, r_c^2\, (2r_c) = 2\pi r_c^3 = 2\pi\, (2{,}5\ cm)^3 = 31{,}25\, \pi\, cm^3 \cong 98{,}175\ cm^3$$

La massa di tale cilindro considerato di alluminio è:

$$m = \rho V = \left(2{,}7\frac{g}{cm^3}\right)(98{,}175\ \ cm^3) \cong 265{,}072\ g$$

La massa del cubo cavo è quindi:

$$massa\ cubo\ cavo = massa\ cubo\ pieno - massa\ cilindro = 2700\ g - 265{,}072\ g \cong$$

$$\cong 2435\ g$$

QUESITO 9

Si calcoli il valore medio della funzione:

$y = \frac{x}{\cos^2 x}$, nell'intervallo $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

Il valor medio della funzione nell'intervallo dato è:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{3}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

Cerchiamo una primitiva di $\frac{x}{\cos^2 x}$ integrando per parti:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int x \cdot (tgx)' dx = x\, tgx - \int tgx\, dx = x\, tgx - \int \frac{sen\, x}{\cos x} dx =$$

$$= x\, tgx + \ln|\cos x| + k$$

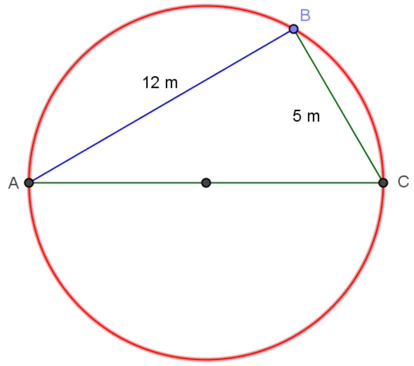
Quindi:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{3}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{3}{\pi}[x\, tgx + \ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi}\left[\frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} + ln\left(\frac{1}{2}\right) - (0)\right] =$$

$$= \sqrt{3} - \frac{3\, ln2}{\pi} \cong 1.07$$

QUESITO 10

Un delfino si trova nel punto A del bordo ovest di una piscina circolare. Nuota in linea retta per 12 m, e tocca con il naso il bordo della piscina nel punto B. Si gira e nuota in una direzione diversa in linea retta per 5 m, e arriva nel punto C situato sul bordo della piscina e diametralmente opposto al punto A dal quale era partito. Se la profondità dell'acqua è ovunque di 2,50 m, quanti litri d'acqua sono contenuti nella piscina?



La piscina ha la forma di un cilindro con area di base data dal cerchio di diametro AC e altezza h=2,5 m.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{144 + 25}\, m = 13\, m,$ quindi il raggio della circonferenza è $6.5\, m$

Il volume della piscina è dato da:

$V(piscina) = \pi R^2 h = \pi(6.5)^2(2.50)\, m^3 = 331.831\, m^3 = 331831\ litri$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri