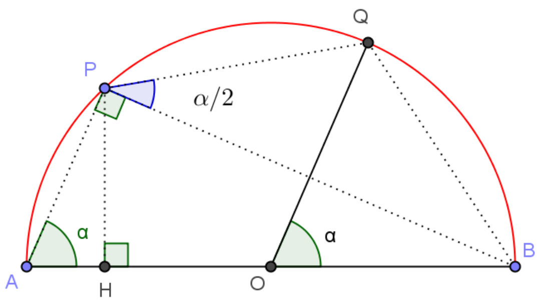
# PNI 2013 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

*Data la semicirconferenza di centro O e diametro AB = 2r, si prenda su di essa un punto P e si tracci il raggio OQ parallelo ad AP.*




## 1)

*Posto* $P\hat{A}B = \alpha$ *, si calcoli il rapporto:*

$$\frac{AP + PQ}{QB + BA}$$

*e lo si esprima in funzione di* $x = sen\,\frac{\alpha}{2}$ *, controllando che risulta:*

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

Notiamo che $B\hat{P}Q = \frac{\alpha}{2}$ perché è la metà del corrispondente angolo al centro BOQ.
Inoltre: $Q\hat{B}O = \frac{\pi-\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ , quindi $Q\hat{B}P = Q\hat{B}O - P\hat{B}A = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\alpha}{2}$

Quindi: $AP = 2rcos\alpha,\quad QB = 2rsen\left(\frac{\alpha}{2}\right),\quad PQ = 2rsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\frac{AP + PQ}{QB + BA} = \frac{2rcos\alpha + 2rsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2rsen\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2r} = \frac{cos\alpha + sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1} = \frac{cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) + sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1} =$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2} + sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1} = \frac{1 - 2sen^2\frac{\alpha}{2} + sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1} = \frac{\mathbf{1 - 2x^2 + x}}{\mathbf{x + 1}} = \boldsymbol{f(x)}$$

**2)**

*Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico $\gamma$ .*

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x + 1}}$$

N.B. La funzione può essere scritta nella forma $y(x+1) = -2x^2 + x + 1$,

$2x^2 + xy - x - y - 1 = 0$ , che è un'iperbole.

**Dominio**: x$\neq -1 \quad \Longrightarrow \quad -\infty < x < -1, \quad -1 < x < +\infty$

**Simmetrie notevoli:** $f(-x) \neq f(x)$, quindi la funzione non è pari, $f(-x) \neq -f(x)$, quindi la funzione non è dispari.

**Intersezioni con gli assi cartesiani:**

se x=0, y=1; se y=0 $-2x^2 + x + 1 = 0$, da cui $x = -\frac{1}{2} \quad ed\ x = 1$

**Segno della funzione:** $\frac{-2x^2+x+1}{x+1} > 0$ .... se x$< -1 \quad \vee \quad -\frac{1}{2} < x < 1$ (con $x \neq 0$)

**Limiti:**

$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-2x^2+x+1}{x+1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} (-2x) = \mp\infty$ (c'è asintoto obliquo, perché la funzione è razionale fratta con il grado del numeratore che supera di 1 il grado del denominatore)

$\lim_{x\to(-1)^\pm} \left(\frac{-2x^2+x+1}{x+1}\right) = \mp\infty$ ($x = -1$ asintoto verticale)

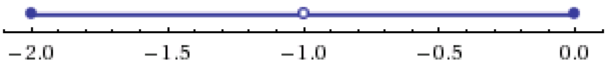
**Asintoto obliquo:**

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 = m \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-2x^2 + x + 1}{x + 1} + 2x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x + 1}{x + 1} = 3 = q$$

Quindi l'asintoto obliquo ha equazione: $y = -2x + 3$

**Derivata prima:**

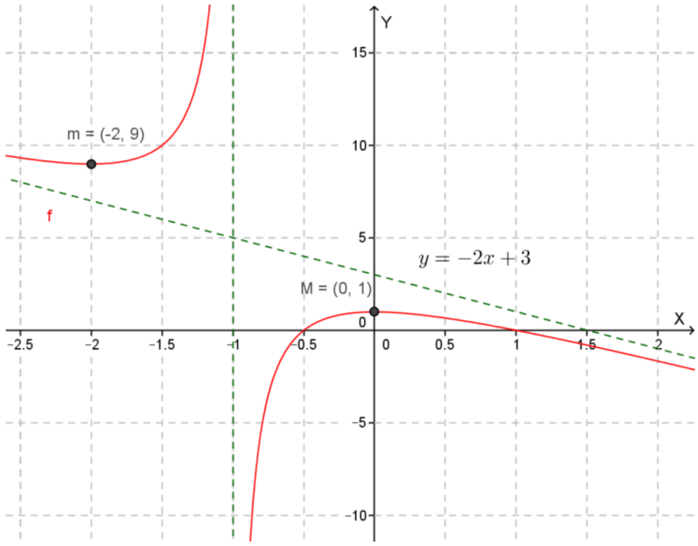
$f'(x) = \frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2} \geq 0$ se $-2 \leq x < -1 \quad \vee \quad -1 < x \leq 0$ , dove la funzione è crescente; $x = -2$ è punto di minimo relativo e $x = 0$ punto di massimo relativo:




**Derivata seconda:**

$f''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3} > 0$ se $x < -1$: concavità verso l'alto; non ci sono flessi.

Il grafico $\gamma$ della funzione è il seguente:




## 3)

*Si scriva l'equazione della retta s che congiunge i punti estremanti relativi di $\gamma$ e si verifichi che essa passa per il punto d'intersezione degli asintoti. Si calcoli inoltre, in gradi e primi (sessagesimali), l'ampiezza dell'angolo acuto $\Phi$ che s forma con l'asintoto obliquo.*

Gli estremi relativi della curva sono: m=(-2;9) e M=(0;1). L'intersezione degli asintoti è il punto C=(-1;5).
La retta s che congiunge m ed M ha equazione:

$$\frac{y-9}{1-9} = \frac{x+2}{0+2} \quad da\ cui \quad 2(y-9) = -8(x+2), \quad 2y = -8x - 16 + 18, \ y = -4x + 1$$

che passa per C=(-1;5) come richiesto.

Calcoliamo l'angolo acuto $\Phi$ che s forma con l'asintoto obliquo in gradi e primi sessagesimali.

$s\colon\ y = -4x + 1 \ ,\ m_s = -4$

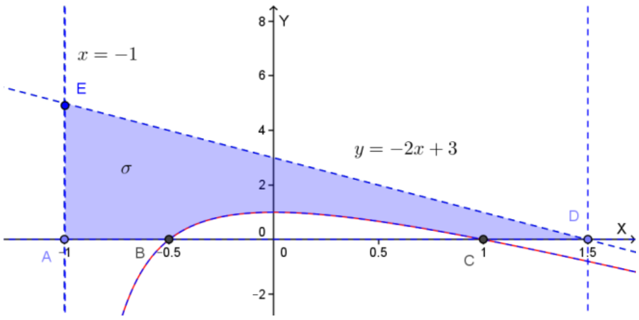
Asintoto obliquo: $y = -2x + 3$ ,   $m_a = -2$

L'angolo acuto $\Phi$ formato dalle due rette si ottiene da:

$$tg\Phi = \left|\frac{m_s - m_a}{1 - m_s m_a}\right| = \left|\frac{-4+2}{1-8}\right| = \frac{2}{7} \quad da\ cui \quad \Phi = arct\left(\frac{2}{7}\right) \cong 15.945° = 15°56'$$

## 4)

*Si calcoli l'area della regione di piano $\sigma$ , delimitata dall'asse $x$ , da $\gamma$ e dai suoi asintoti.*




La superficie $\sigma$ è ABCDEA indicata in figura e la sua area si può ottenere sottraendo all'area del triangolo rettangolo ADE l'area del trapezoide individuato da $\gamma$ e dall'asse x tra -1/2 e 1.

$$A(\sigma) = A(ADE) - \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{-2x^2 + x + 1}{x+1}\, dx = \frac{\frac{5}{2}\cdot 5}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{(-2x+3)(x+1) - 2}{x+1}\right) dx =$$

$$= \frac{25}{4} - \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left((-2x+3) - \frac{2}{x+1}\right) dx = \frac{25}{4} + [x^2 - 3x + 2ln|x+1|]_{-\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{25}{4} + \left[1 - 3 + 2ln2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right] = \frac{25}{4} + \left[-\frac{15}{4} + 4ln2\right] =$$

$$= \frac{5}{2} + 4ln2 \cong 5.27\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri