# PNI 2013 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

*Si consideri la funzione:*

$$f(x) = \frac{1}{x\,lnx}$$

## 1)

*Si studi la funzione e si tracci il suo grafico $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $Oxy$.*

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x\,lnx}}$$

**Dominio**: $x \neq 1 \;\; e \;\; x > 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < 1, \;\; 1 < x < +\infty$

**Simmetrie notevoli:** visto il dominio, la funzione non può essere né pari né dispari.

**Intersezioni con gli assi cartesiani:**

se x=0 la funzione non esiste; y=0, mai: non ci sono intersezioni con gli assi.

**Segno della funzione:** $\frac{1}{x\,lnx} > 0$ se $x > 1$

**Limiti:**

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\,lnx}\right) = 0^-$ ($y = 0$ asintoto orizzontale); non c'è asintoto obliquo.

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x\,lnx}\right) = -\infty$ ($x = 0$ asintoto verticale); si ricordi che $\lim\limits_{x\to0^+}(x\,lnx) = 0^-$

$\lim\limits_{x\to1^\pm}\left(\frac{1}{x\,lnx}\right) = \pm\infty$ ($x = 1$ asintoto verticale)

**Derivata prima:**

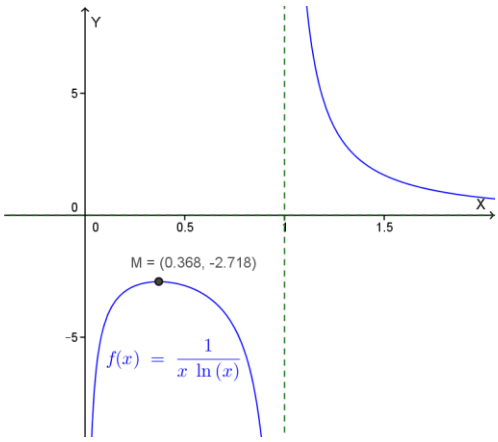
$f'(x) = \frac{-lnx-1}{x^2\ln^2 x} \geq 0$ se $-lnx - 1 > 0, \;\; lnx < -1, \;\; 0 < x < \frac{1}{e}$ , dove la funzione è crescente; la funzione è decrescente per $\frac{1}{e} < x < 1 \;\; e\;per \;\; x > 1$ ; quindi $x = \frac{1}{e}$ è punto di massimo relativo, che vale $f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$: $\quad M = \left(\frac{1}{e}; -e\right)$.

**Derivata seconda:**

$$f''(x) = \frac{2\ln^2 x + 3\,lnx + 2}{x^3 \ln^3 x}$$

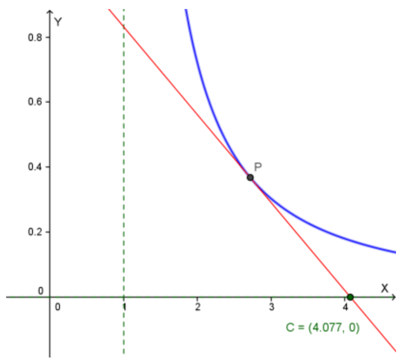
$2\ln^2 x + 3\,lnx + 2 > 0$ sempre, perché $\Delta = 9 - 16 < 0$
$x^3 \ln^3 x > 0\; se\;\; x > 1$ : quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se $x > 1$ e verso il basso se $0 < x < 1$: non ci sono flessi.

Il grafico $\gamma$ della funzione è il seguente:




## 2)

*Si scriva l'equazione della tangente a $\gamma$ nel punto P di ascissa $x = e$ e si determini l'ascissa del punto C in cui essa incontra l'asse x . Si calcoli inoltre l'area del semicerchio $\Gamma$, situato nel $I$ quadrante, avente il centro in C e raggio uguale alla distanza di C dall'origine O.*




Il punto P ha ordinata $f(e) = \frac{1}{e}$. Il coefficiente angolare della tangente in P è dato da:

$m = f'(e) = -2/e^2$. La tangente in P ha pertanto equazione:

$$y - f(e) = f'(e)(x - e), \quad y - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e^2}(x - e), \quad y = -\frac{2}{e^2}\,x + \frac{3}{e}$$

Ponendo y=0 troviamo l'ascissa di C:

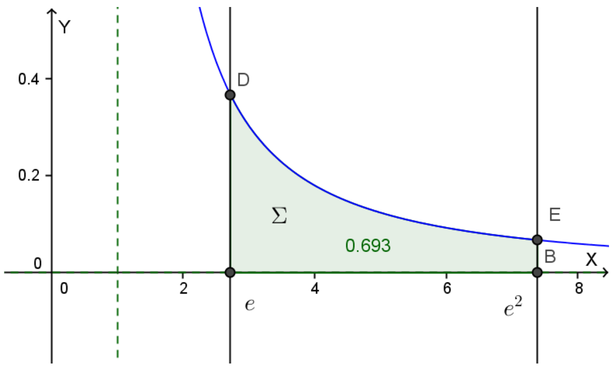
$x = \frac{3e}{2}$; quindi: $C = \left(\frac{3e}{2}; 0\right)$

Il raggio della circonferenza di centro C passante per O è dato da $CO = \frac{3e}{2}$. L'area del semicerchio richiesto è quindi:

$$\frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{3e}{2}\right)^2}{2} = \frac{9\pi e^2}{8}\, u^2 \cong 26.12\, u^2$$

## 3)

*Si calcoli l'area della superficie piana $\Sigma$, delimitata dalla curva $\gamma$, dall'asse $x$, da $\gamma$ e dalle rette $x = e,\ x = e^2$.*



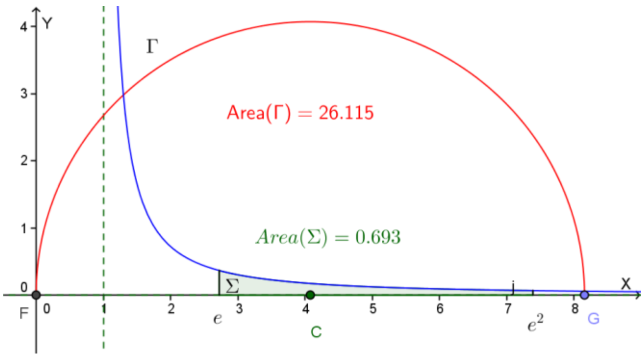

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area(\Sigma) = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\, lnx} = \int_e^{e^2} \frac{1/x}{lnx} dx = [ln|lnx|]_e^{e^2} = ln2 - 0 = ln2\ \ u^2 \cong 0.69\, u^2$$

**4)**

*Si scelga a caso un punto all'interno del semicerchio $\Gamma$. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla superficie piana $\Sigma$.*

La probabilità richiesta è data dal rapporto tra l'area favorevole e l'area possibile:




$$p = \frac{Area(\Gamma) - Area(\Sigma)}{Area(\Gamma)} = \frac{26.12 - 0.69}{26.12} = 0.974 \cong 97\%$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri