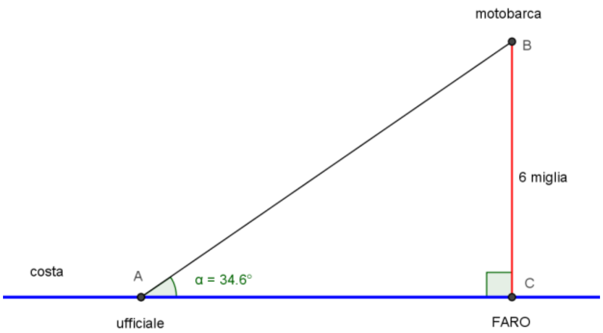
PNI 2013 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Un ufficiale della guardia di finanza, in servizio lungo un tratto rettilineo di costa, avvista una motobarca di contrabbandieri che dirige in linea retta, perpendicolarmente alla costa, verso un vecchio faro abbandonato. L'angolo tra la direzione della costa e il raggio visivo dell'ufficiale che guarda la motobarca è di 34,6°; il natante si trova a 6 miglia marine dal faro e si muove con una velocità di 18 nodi (miglia marine all'ora). L'ufficiale ordina di salire immediatamente in macchina, in modo da raggiungere il faro, percorrendo una strada parallela alla spiaggia, 10 minuti prima che vi approdino i contrabbandieri, per coglierli con le mani nel sacco. A che velocità media, in km/h, deve muoversi l'automezzo della guardia di finanza per arrivare nei tempi previsti? (Un miglio marino = 1853,182 m).



$$v = velocità\ motobarca = 18\ nodi = 18\ miglia/h$$

La motobarca deve percorrere 6 miglia, quindi, per raggiungere il faro impiega un tempo t dato da:

$$v = \frac{BC}{t} \quad \Rightarrow t = \frac{BC}{v} = \frac{6\ miglia}{18\,\frac{miglia}{h}} = \frac{1}{3}\ h = 20\ minuti$$

La macchina della guardia di finanza deve arrivare al faro 10 minuti prima dei contrabbandieri, quindi deve impiegare 10 minuti per compiere il tratto AC.

Risulta:

$$AC = \frac{BC}{tg\alpha} = \frac{6\ miglia}{tg\ 34.6°} = \frac{6\ miglia}{0.69} = 8.696\ miglia$$

$$\textit{velocità media automezzo} = \frac{8.696\ miglia}{\frac{1}{6}h} = 52.174\ \frac{miglia}{h} = \frac{(52.174)\cdot(1853.182)\ m}{h} =$$

$$= \frac{96687.757\ \ m}{h} \cong 96.688\ \ km\ /\ h$$

QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $(1+x^2)^{\frac{1}{sen^2 x}}$ *, quando x tende a 0.*

Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞.

$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{sen^2 x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{sen^2 x}} = e$, poiché, se x tende a 0,

$(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ tende a e e $\frac{x^2}{sen^2 x}$ tende a 1; si ricordino infatti i seguenti limiti notevoli:

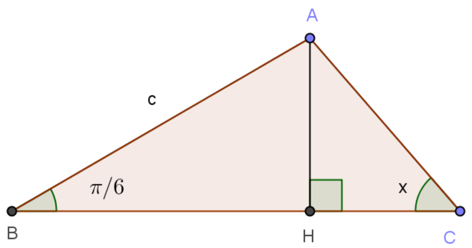
$$\lim_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{sen^2 x} = 1\ .$$

QUESITO 3

Nel triangolo ABC l'angolo in B misura $\frac{\pi}{6}$ *e quello in C misura x . Si determini l'angolo x in modo che, detta H la proiezione ortogonale di A sulla retta BC, la quantità:*

$$\frac{BC+HC}{AC}$$

risulti massima.



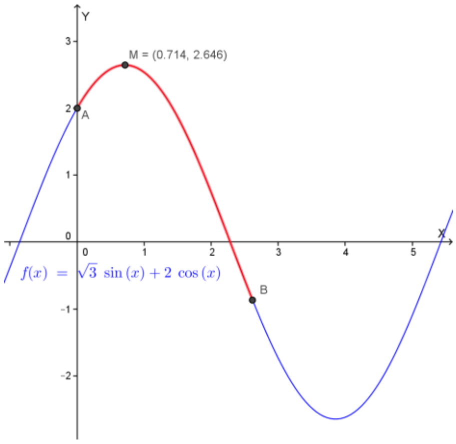
Posto $AB = c$ risulta: $AH = \frac{c}{2}$, $BH = \frac{c}{2}\cdot\sqrt{3}$, $\frac{AC}{sen\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{c}{sen(x)} \implies AC = \frac{c}{2sen(x)}$

$HC = AC\cdot\cos(x) = \frac{c}{2sen(x)}\cdot\cos(x) = \frac{c\cdot\cos(x)}{2\ sen(x)}$, $BC = BH + HC = \frac{c}{2}\cdot\sqrt{3} + \frac{c\cdot\cos(x)}{2\ sen(x)}$

$$\frac{BC + HC}{AC} = \frac{\frac{c}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{c \cdot \cos(x)}{2\, sen(x)} + \frac{c \cdot \cos(x)}{2\, sen(x)}}{\frac{c}{2sen(x)}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\cos(x)}{sen(x)}}{\frac{1}{2sen(x)}} = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x) = y$$

Si tratta quindi di trovare il massimo della funzione:

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x) \\ 0 \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \end{cases}$$



Ricordiamo che l'espressione $y = a\,\mathrm{sen}(x) + b\cos(x)$ può essere scritta nella forma

$y = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot sen(x + \alpha)$, dove $tg(\alpha) = \frac{b}{a}$

$y = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x) = \sqrt{7}\, sen(x + \alpha)$, con $tg(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\alpha = arct\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cong 0.857$

Il massimo della funzione si ha quando $sen(x + \alpha) = 1$, $x + \alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} - arct\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cong 0.714\ rad}$$

Il massimo ella funzione è $\boldsymbol{y(0.714) = \sqrt{7} \cdot 1 \cong 2.646}$

QUESITO 4

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \log_x 2$$

nel punto P di ascissa x = 2 .

Notiamo che:

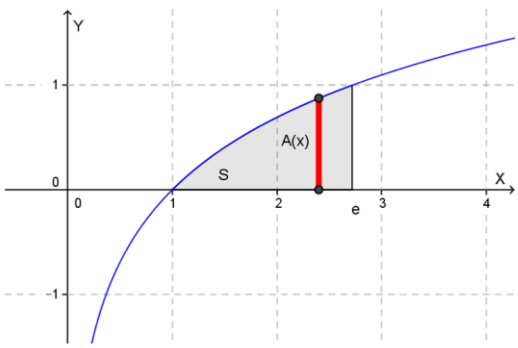
$f(x) = \log_x 2 = \frac{ln2}{\ln x}$, quindi $f'(x) = ln2\left(-\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}\right) = -\frac{\ln 2}{x\ln^2 x}$, $f'(2) = m = -\frac{1}{2\ln 2}$

Quindi la tangente ha equazione:

$y - f(2) = f'(2)(x-2)$, $y - 1 = -\frac{1}{2\ln 2}(x-2)$, $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2\ln 2}x + 1 + \frac{1}{ln2}}$

QUESITO 5

La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = \ln x$ e dall'asse x nell'intervallo $1 \le x \le e$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte rettangoli aventi l'altezza quadrupla della base. Si calcoli il volume di Σ.



Il volume di *Σ* si calcola mediante il seguente integrale:

$V(\Sigma) = \int_1^e A(x)dx$, essendo A(x) l'area del rettangolo con dimensioni $ln\, x$ e $4lnx$, quindi:

$A(x) = 4\ln^2 x$

$$\int \ln^2 x\, dx = \int (x)' \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x - \int x \cdot \left(2(lnx) \cdot \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= x\ln^2 x - 2\int lnx\,dx = x\ln^2 x - 2\int (x)' lnx\,dx = x\ln^2 x - 2\left[x\,lnx - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\right] =$$

$= \ x\ln^2 x - 2x\,lnx + 2x + K$ pertanto:

$$\boldsymbol{V(\Sigma)} = \int_1^e A(x)dx = \int_1^e 4\ln^2 x\ dx = 4[x\ln^2 x - 2x\,lnx + 2x]_1^e = 4[e - 2e + 2e - (2)] =$$

$$= \boldsymbol{4(e-2)\,u^3} \ \cong \boldsymbol{2.873\,u^3} = \boldsymbol{V(\Sigma)}$$

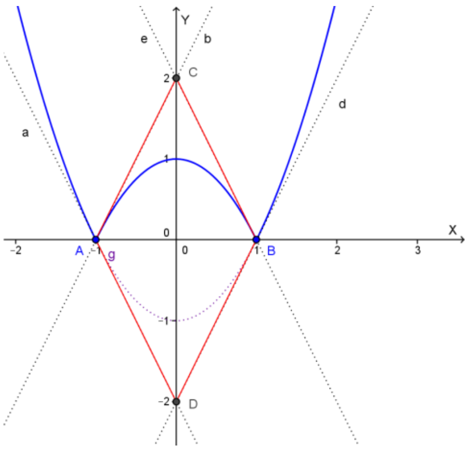
QUESITO 6

Si disegni la curva di equazione

$$y = |x^2 - 1|$$

Si scrivano le equazioni delle tangenti condotte nei punti A e B di ordinata nulla. Si verifichi che le due coppie di rette trovate individuano un rombo, del quale si chiedono le misure del perimetro e dell'area.

E' sufficiente disegnare la parabola di equazione $y = x^2 - 1$, prenderne la parte positiva e ribaltarne la parte negativa rispetto all'asse x:



La curva può essere vista nella forma:

$$y = \begin{cases} -x^2 + 1, & se -1 \le x \le 1 \\ x^2 - 1, & se\ \ x < -1\ \ oppure\ \ x > 1 \end{cases}$$

Inoltre:

$$y' = \begin{cases} -2x, & se -1 < x < 1 \\ 2x, & se\ \ x < -1\ \ oppure\ \ x > 1 \end{cases}$$

Cerchiamo le tangenti in $A = (-1; 0)$. La tangente sinistra a ha $m = (2x)_{x=-1} = -2$, la tangente destra b ha $m = (-2x)_{x=-1} = 2$; quindi le tangenti in A hanno equazioni:

a: $y - 0 = -2(x+1), \quad y = -2x - 2$
b: $y - 0 = 2(x+1), \quad y = 2x + 2$

In modo analogo si trovano le tangenti in B:

d: $y - 0 = 2(x-1), \quad y = 2x - 2$
e: $y - 0 = -2(x-1), \quad y = -2x + 2$

I lati opposti del quadrilatero ACBD sono paralleli: $a \parallel e, \quad b \parallel d$; osservando la figura, dalle intersezioni delle rette con gli assi cartesiani si deduce facilmente che il quadrilatero ha i lati uguali, quindi è un rombo.

Il lato del rombo è: $BC = \sqrt{5}$ e le diagonali sono: $AB = 2 \quad e \quad CD = 4$. Quindi:

$$2p = 4\sqrt{5}\ u, \quad Area = \frac{4 \cdot 2}{2}\ u^2 = 4\ u^2$$

QUESITO 7

Tenuto conto che:

$$ln3 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + tg^2 x}{tgx}\, dx$$

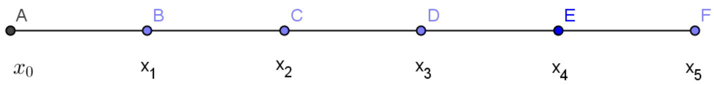
si calcoli un'approssimazione di $\ln 3$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Posto $f(x) = \frac{1+tg^2x}{tgx}$, consideriamo l'intervallo $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ e dividiamolo in n parti; poniamo $h = \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}{n} = \frac{\pi}{6n}$.

Utilizzando, per esempio, la formula dei trapezi, l'integrale dato può essere approssimato mediante la formula:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

Nel nostro caso, ponendo per esempio n=5, abbiamo:



$$x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{30} = \frac{6}{30}\pi = \frac{\pi}{5}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\frac{\pi}{30} = \frac{7}{30}\pi, \quad x_3 = \frac{8}{30}\pi = \frac{4}{15}\pi$$

$x_4 = \frac{9}{30}\pi = \frac{3}{10}\pi \qquad x_5 = \frac{10}{30}\pi = \frac{\pi}{3}$

Quindi si ha la seguente approssimazione:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+tg^2x}{tgx}\,dx \cong \frac{\pi}{6n}\left[\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}+f\left(\frac{\pi}{5}\right)+f\left(\frac{7}{30}\pi\right)+f\left(\frac{4}{15}\pi\right)+f\left(\frac{3}{10}\pi\right)\right] \cong 1.103$$

Quindi: $ln(3) \cong 1.1$

Notiamo che risulta $ln(3) \cong 1.099$

QUESITO 8

Si risolva l'equazione: $log_2(log_3 x) = 3.$

Poste le condizioni $x > 0$ e $\log_3 x > 0$, equivalenti a $x > 1$, l'equazione equivale a:

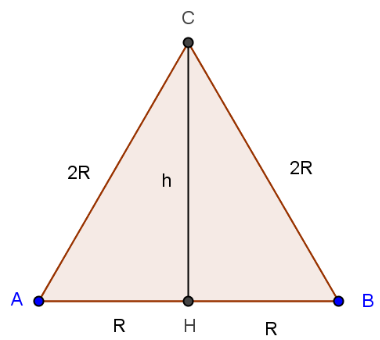
$log_3 x = 2^3 = 8$, da cui: $x = 3^8$

QUESITO 9

Un cono equilatero di piombo (densità $\rho = 11{,}34\ g/cm^3$), avente il raggio $r = 5\ cm$, presenta all'interno una cavità di forma irregolare ed ha la massa $m = 2\ kg$. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla cavità.

Ricordando che $\rho = \frac{m}{V}$, dopo aver trovato il volume del cono possiamo trovare la sua massa (massa del cono senza cavità).

Nel cono equilatero l'apotema è uguale al diametro di base, quindi la sua altezza equivale a quella di un triangolo equilatero di lato pari al diametro di base del cono:



$h = R \cdot \sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2(R\cdot\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi \cdot 125\right)\ cm^3$
$\cong 226.725\ cm^3$

$$massa\ cono\ \ pieno = m(pieno) = \rho V \cong \left(11{,}34\frac{g}{cm^3}\right)(226.725\ cm^3) \cong 2571\ g = 2.571\ kg$$

$$massa\ cavità\ di\ piombo = 2.571\ kg - 2kg = 0.571\ kg = 571\ g$$

$$Volume\ cavità = \frac{m}{\rho} = \frac{571\ g}{11{,}34\frac{g}{cm^3}} = 50.353\ cm^3$$

La probabilità richiesta è data da:

$$p = \frac{V(cono\ pieno) - V(cavità)}{V(cono\ pieno)} = \frac{226.725\ cm^3 - 50.353\ cm^3}{226.725\ cm^3} \cong 0.778 = 77.8\ \%$$

QUESITO 10

Un missile ha la probabilità 3/10 di colpire un bersaglio. Quanti missili si debbono lanciare perché la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta sia maggiore dell'80%?

La probabilità di non colpire mai il bersaglio in n lanci è $\left(\frac{7}{10}\right)^n$; la probabilità che il bersaglio venga colpito almeno una volta è $\mathbf{1-\left(\frac{7}{10}\right)^n}$; tale probabilità è maggiore dell'80% se:

$1-\left(\frac{7}{10}\right)^n \geq 0.80,\ \left(\frac{7}{10}\right)^n \leq 0.20,\ \ n \cdot ln\left(\frac{7}{10}\right) \leq ln(0.20)$, da cui, notato che $ln\left(\frac{7}{10}\right) < 0$,

$n \geq \frac{\ln(0.20)}{ln\left(\frac{7}{10}\right)} \quad \Longrightarrow \quad n \geq 4.512$ Il minimo valore di n è quindi 5.

N.B.

Con n=5 la probabilità di colpire almeno una volta il bersaglio è pari a:

$$1-\left(\frac{7}{10}\right)^5 \cong 0.832 \cong 83\ \%$$

Con n=4 la probabilità di colpire almeno una volta il bersaglio è pari a:

$$1-\left(\frac{7}{10}\right)^4 \cong 0.76 \cong 76\ \%$$

si debbono quindi lanciare almeno 5 missili affinché la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta sia maggiore dell'80%?

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri