



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Data la semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$, si prenda su di essa un punto P e si tracci il raggio OQ parallelo ad AP .

1. Posto $\widehat{PAB} = \alpha$, si calcoli il rapporto:

$$\frac{AP + PQ}{QB + BA}$$

e lo si esprima in funzione di $x = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

- Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ .
- Si scriva l'equazione della retta s che congiunge i punti estremanti relativi di γ e si verifichi che essa passa per il punto d'intersezione degli asintoti. Si calcoli inoltre, in gradi e primi (sessagesimali), l'ampiezza dell'angolo acuto Φ che s forma con l'asintoto obliquo.
- Si calcoli l'area della regione di piano σ , delimitata dall'asse x , da γ e dai suoi asintoti.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

- Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy .
- Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto P di ascissa $x = e$ e si determini l'ascissa del punto C in cui essa incontra l'asse x . Si calcoli inoltre l'area del semicerchio Γ , situato nel I quadrante, avente il centro in C e raggio uguale alla distanza di C dall'origine O .
- Si calcoli l'area della superficie piana Σ , delimitata dalla curva γ , dall'asse x e dalle rette $x = e$, $x = e^2$.
- Si scelga a caso un punto all'interno del semicerchio Γ . Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla superficie piana Σ .



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Un ufficiale della guardia di finanza, in servizio lungo un tratto rettilineo di costa, avvista una motobarca di contrabbandieri che dirige in linea retta, perpendicolarmente alla costa, verso un vecchio faro abbandonato. L'angolo tra la direzione della costa e il raggio visivo dell'ufficiale che guarda la motobarca è di $34,6^\circ$; il natante si trova a 6 miglia marine dal faro e si muove con una velocità di 18 nodi (miglia marine all'ora). L'ufficiale ordina di salire immediatamente in macchina, in modo da raggiungere il faro, percorrendo una strada parallela alla spiaggia, 10 minuti prima che vi approdino i contrabbandieri, per coglierli con le mani nel sacco. A che velocità media, in km/h, deve muoversi l'automezzo della guardia di finanza per arrivare nei tempi previsti? (Un miglio marino = 1853,182 m).

2. Si calcoli il limite della funzione $(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, quando x tende a 0.

3. Nel triangolo ABC l'angolo in B misura $\pi/6$ e quello in C misura x . Si determini l'angolo x in modo che, detta H la proiezione ortogonale di A sulla retta BC, la quantità:

$$\frac{BC + HC}{AC},$$

risulti massima.

4. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \log_x 2$$

nel punto P di ascissa $x = 2$.

5. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = \ln x$ e dall'asse x nell'intervallo $1 \leq x \leq e$, è la base di un solido Σ , le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte rettangoli aventi l'altezza quadrupla della base. Si calcoli il volume di Σ .
6. Si disegni la curva di equazione

$$y = |x^2 - 1|$$

Si scrivano le equazioni delle tangenti condotte nei punti A e B di ordinata nulla. Si verifichi che le due coppie di rette trovate individuano un rombo, del quale si chiedono le misure del perimetro e dell'area.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

7. Tenuto conto che:

$$\ln 3 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} dx,$$

si calcoli un'approssimazione di $\ln 3$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8. Si risolva l'equazione:

$$\log_2(\log_3 x) = 3.$$

9. Un cono equilatero di piombo (densità $\rho = 11,34 \text{ g/cm}^3$), avente il raggio $r = 5 \text{ cm}$, presenta all'interno una cavità di forma irregolare ed ha la massa $m = 2 \text{ kg}$. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla cavità.
10. Un missile ha la probabilità $3/10$ di colpire un bersaglio. Quanti missili si debbono lanciare perché la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta sia maggiore dell'80%?

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.