



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

**Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO SPERIMENTALE

**Indirizzo:** PIANO NAZIONALE INFORMATICA

**Tema di:** MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

E' dato un angolo retto  $X\hat{O}Y$  e sulla sua bisettrice un punto P, tale che  $P\hat{A}O = 2 \cdot P\hat{B}O$ , essendo A e B punti, rispettivamente, di OX e di OY.

1. Posto  $P\hat{B}O = \alpha$ , si calcoli il rapporto:  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$  e lo si esprima in funzione di  $x = \operatorname{tg} \alpha$ , controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{2(x+1)}$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .
3. Si considerino i punti C e D in cui l'asintoto obliquo di  $\gamma$  incontra rispettivamente l'asse y e l'asse x. Se E è il punto medio del segmento CO, si mostri che la retta DE è tangente a  $\gamma$  nel punto di ascissa 1.
4. Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo COD. La probabilità che tale punto risulti interno alla regione  $\sigma$  delimitata, nel primo quadrante, da  $\gamma$  e dagli assi medesimi è maggiore o minore del 50%? Si illustri il ragionamento seguito.

**PROBLEMA 2**

Si consideri la funzione:

$$f(x) = x - 2\arctg x.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. La curva  $\gamma$  incontra l'asse x, oltre che nell'origine, in altri due punti aventi ascisse opposte. Detta  $\xi$  l'ascissa positiva, si dimostri che  $1 < \xi < \pi$  e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si scriva l'equazione della tangente a  $\gamma$  nel suo punto di flesso, si verifichi che essa risulta perpendicolare ad entrambi gli asintoti e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con uno degli asintoti e l'asse x.
4. Si calcoli l'area della regione di piano, delimitata da  $\gamma$  e dall'asse x sull'intervallo chiuso  $[-1, 0]$ .



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

**Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO SPERIMENTALE

**Indirizzo:** PIANO NAZIONALE INFORMATICA

**Tema di:** MATEMATICA

**QUESTIONARIO**

1. E' dato il settore circolare AOB, di centro O, raggio r e ampiezza  $\pi/3$ . Si inscriba in esso il rettangolo PQMN, con M ed N sul raggio OB, Q sull'arco e P su OA. Si determini l'angolo  $\widehat{QOB} = x$ , affinché il perimetro del rettangolo sia massimo.
2. Quali sono i poliedri regolari? Perché sono detti anche solidi platonici?
3. Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$x = \frac{1}{2} \log \left( \frac{y+1}{y-1} \right)$$

nel punto P di ordinata  $y = 2$ .

4. Un solido  $\Omega$  ha per base la regione R delimitata dal grafico di  $f(x) = \log x$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[1, e]$ . In ogni punto di R a distanza  $x$  dall'asse  $y$ , la misura dell'altezza del solido è data da  $h(x) = x$ . Quale sarà il volume del solido?
5. Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di  $7^\circ$ . Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di  $13^\circ$ . Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?
6. Un cono di nichel (densità  $\rho_1 = 8,91 \text{ g/cm}^3$ ) ha il raggio di base di 15 cm e l'altezza di 20 cm. Da questo cono se ne taglia via un altro, avente l'altezza di 5 cm, che viene sostituito da un cilindro di alluminio (densità  $\rho_2 = 2,70 \text{ g/cm}^3$ ), che ha la stessa altezza del cono piccolo e la base uguale alla base minore del tronco di cono residuo. Si dica se la massa  $m_2$  del solido così ottenuto è maggiore o minore di quella  $m_1$  del cono di partenza.
7. Tenuto conto che:

$$\ln 3 = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx,$$

si calcoli un'approssimazione di  $\ln 3$ , utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca***Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO SPERIMENTALE

**Indirizzo:** PIANO NAZIONALE INFORMATICA**Tema di:** MATEMATICA

8. Si consideri l'equazione:

$$4x^3 - 14x^2 + 20x - 5 = 0$$

Si dimostri che essa per  $0 < x < 1$  ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

9. Lanciando due dadi, qual è la probabilità che esca per somma un numero primo? Quante volte occorre lanciali perché si possa aspettare, con una probabilità  $p = 80\%$  assegnata di veder apparire almeno una volta un numero primo?
10. Data la circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 = 16$ , si calcoli la lunghezza dell'arco compreso tra i punti  $A(2\sqrt{3}; 2)$  e  $B(2; 2\sqrt{3})$ . Si scelga poi a caso un punto sulla circonferenza: si determini la probabilità che tale punto giaccia sull'arco AB.

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.