Calendario Boreale 2 (AMERICHE) 2014

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione $f(x) = |e^{2x} - 3e^x|$

1)

Si mostri che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} |e^{2x} - 3e^x| = |0^+ - 0^+| = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} |e^{2x} - 3e^x| = [F.I.\ \infty - \infty]$$

$$\lim_{x\to+\infty} |e^{2x} - 3e^x| = \lim_{x\to+\infty} e^x|e^x - 3| = \lim_{x\to+\infty} e^x \cdot |e^x| = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$$

2)

Se ne disegni il grafico Γ *di* $f(x)$.

$f(x) = |e^{2x} - 3e^x|$

E' sufficiente studiare il grafico di $y = g(x) = e^{2x} - 3e^x$.

Dominio: $-\infty < x < \infty$
Simmetrie notevoli: la funzione non né pari né dispari.
Intersezioni con gli assi:

$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -2$
$y = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{2x} - 3e^x = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{2x} = 3e^x \quad \Longrightarrow e^x = 3 \quad x = ln3$

Segno della funzione:

$y > 0$ se $e^{2x} - 3e^x > 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{2x} > 3e^x \quad \Longrightarrow \quad e^x > 3 \quad \Longrightarrow \quad x > ln3$

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty}(e^{2x} - 3e^x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(e^x - 3) = 0^-$ ($y = 0$ asintoto orizz. per $x \longrightarrow -\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{2x}-3e^{x}) = \lim_{x\to+\infty} e^{x}(e^{x}-3) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = +\infty$$

Non esiste asintoto obliquo per $x \longrightarrow +\infty$ poiché $g(x) \sim e^{2x}$, non è un infinito di ordine 1.

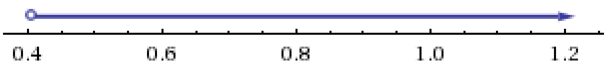
Derivata prima:

$g'(x) = 2e^{2x} - 3e^{x}$;   poniamo $e^{x} = t$

$g'(x) \geq 0$ se $2e^{2x} - 3e^{x} \geq 0,\quad cioè\ se \quad 2t^2 - 3t \geq 0,\quad t \leq 0\ \ vel\ \ t \geq \frac{3}{2}$

Quindi $g'(x) \geq 0$ se $e^{x} \leq 0: mai;\quad vel\quad e^{x} \geq \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x \geq ln\left(\frac{3}{2}\right)$

La funzione è quindi decrescente per $x < ln\left(\frac{3}{2}\right)$ e crescente per $x > ln\left(\frac{3}{2}\right)$.



$x = ln\left(\frac{3}{2}\right)$ punto di minimo relativo (che è anche assoluto), di ordinata

$g\left(ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{4}$

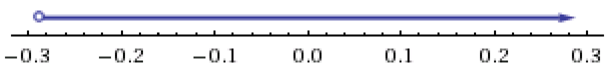
$Minimo\ assoluto \quad M = \left(ln\left(\frac{3}{2}\right), -\frac{9}{4}\right)$

Derivata seconda:

$g''(x) = 4e^{2x} - 3e^{x}$

$g''(x) \geq 0$ se $4e^{2x} - 3e^{x} \geq 0,\quad e^{x} \leq 0: mai \quad vel \quad e^{x} \geq \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad x \geq ln\left(\frac{3}{4}\right)$

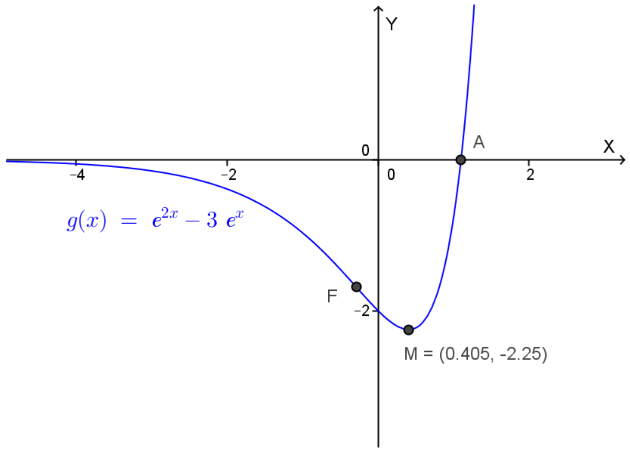
La funzione è concava verso il basso se $x < ln\left(\frac{3}{4}\right)$, verso l'alto se $x > ln\left(\frac{3}{4}\right)$.



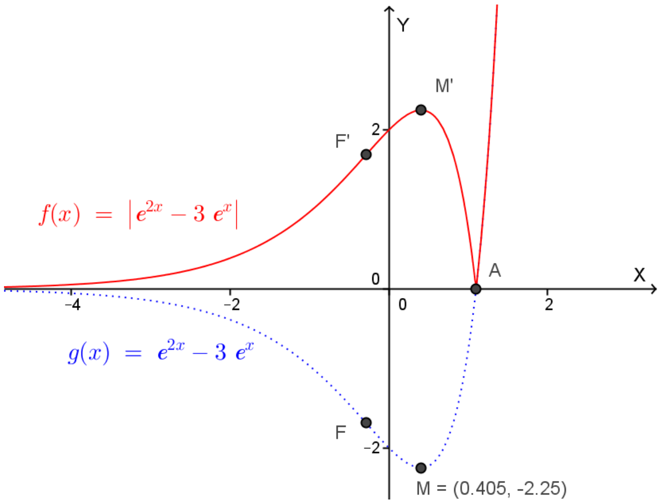
$x = ln\left(\frac{3}{4}\right)$ punto di flesso, con ordinata $g\left(ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{9}{16} - 3 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{9}{16}$

$Flesso \quad F = \left(ln\left(\frac{3}{4}\right); -\frac{9}{16}\right)$

Il grafico di $\boldsymbol{y = g(x) = e^{2x} - 3e^{x}}$ è il seguente:



Il grafico Γ *di* $f(x) = |g(x)|$ si ottiene da quello di g(x) confermando la parte positiva e ribaltando rispetto all'asse x la parte negativa; abbiamo quindi il grafico seguente:



Notiamo che M', simmetrico di M rispetto all'asse delle x, è massimo relativo per la f e che F', simmetrico di F, è flesso per la f. In A, di coordinate $(ln3; 0)$, f non è derivabile.

3)

Si dica se alla funzione $f(x)$ *si può applicare il teorema di Rolle nell'intervallo* $[0, ln2]$ *e il teorema di Lagrange nell'intervallo* $[1,2]$, *giustificando le risposte.*

$f(x) = |e^{2x} - 3e^{x}|$ soddisfa il teorema di Rolle in $[0, ln2]$?
$f(x)$ è continua in $[0, ln2]$ e derivabile in $(0, ln2)$ (ricordiamo che la funzione non è derivabile solo in $x = ln3 > ln2$;
rimane da verificare se la funzione assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo:

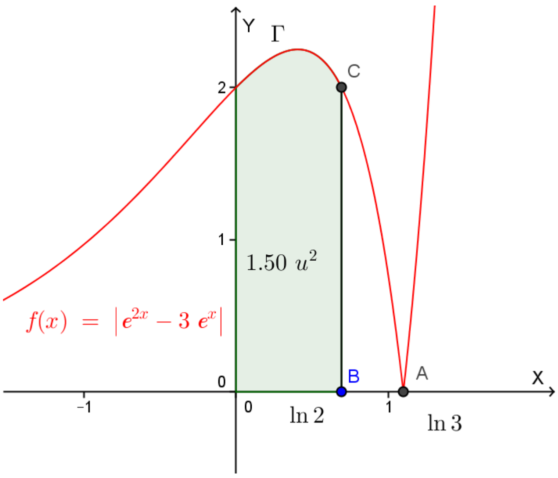
$f(0) = 2$, $f(ln2) = |4 - 6| = 2$: quindi il teorema di Rolle vale.
Notiamo che nell'intervallo dato abbiamo la tangente orizzontale in M'.

$f(x) = |e^{2x} - 3e^x|$ soddisfa il teorema di Lagrange in $[1,2]$?

No, il teorema di Lagrange non vale in tale intervallo, poiché, pur essendo la funzione continua nell'intervallo chiuso, non è derivabile nell'aperto $(1,2)$, di cui fa parte il punto di non derivabilità $x = ln3$.

4)

Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da Γ e dall'asse x sull'intervallo $[0, ln2]$.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^{ln2} |e^{2x} - 3e^x| dx = \int_0^{ln2} (-e^{2x} + 3e^x) dx = \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + 3e^x\right]_0^{ln2} =$$

$$= \left[-2 + 6 - \left(-\frac{1}{2} + 3\right)\right] = \frac{3}{2}u^2 = 1.50\, u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri