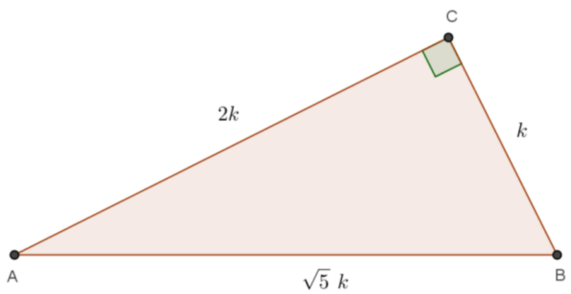
Calendario Boreale 2 (AMERICHE) 2014

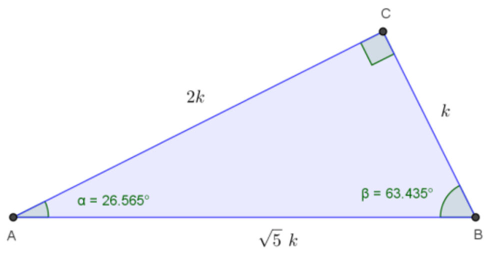
PROBLEMA 2

I lati di un triangolo rettangolo misurano $k, 2k$ e $\sqrt{5}k$, essendo k un numero reale positivo.



1)

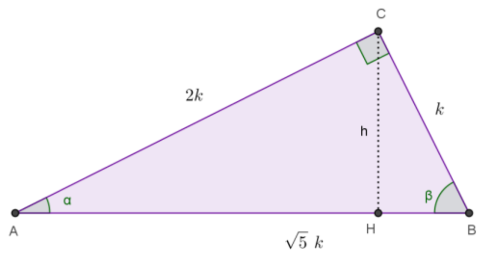
Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza degli angoli acuti del triangolo. Si determini k in modo che l'altezza relativa all'ipotenusa abbia lunghezza uguale a 2 e si determinino le misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.



$$sen\alpha = \frac{k}{\sqrt{5}k} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\alpha \cong 26°34'$$

$$\beta \cong 90° - \alpha \cong 63°26'$$



$$h = \frac{k \cdot 2k}{\sqrt{5}\,k} = \frac{2k}{\sqrt{5}} = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{5}$$

$AC^2 = AB \cdot AH$ $(I\ teorema\ di\ Euclide)$ da cui:

$$AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{4k^2}{\sqrt{5}k} = \frac{4k}{\sqrt{5}} = 4$$

Analogamente: $BC^2 = AB \cdot BH$ $(I\ teorema\ di\ Euclide)$ da cui:

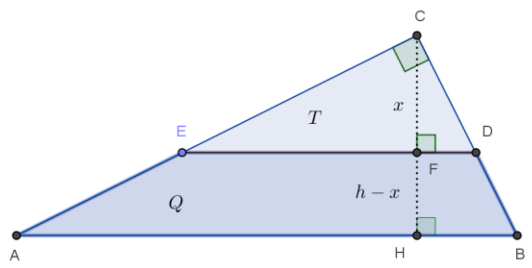
$$BH = \frac{BC^2}{AB} = \frac{k^2}{\sqrt{5}k} = \frac{k}{\sqrt{5}} = 1$$

2)

Una retta parallela all'ipotenusa, avente distanza x dal vertice dell'angolo retto, divide il triangolo in un triangolo T e un quadrilatero Q.
Si mostri che il rapporto tra l'area di T e l'area di Q, in funzione di x , è uguale a

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

Anche se non è detto esplicitamente, consideriamo il valore di k trovato nel punto precedente $k = \sqrt{5}$.



Dalla similitudine fra i triangoli ABC e CDE si ha:

$$ED: AB = CF: CH \quad \Longrightarrow \quad ED = \frac{AB \cdot CF}{CH} = \frac{\sqrt{5}k \ \cdot x}{\frac{2k}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{2}x$$

Quindi: $Area(T) = \frac{ED \cdot CF}{2} = \frac{\frac{5}{2}x \cdot x}{2} = \frac{5}{4}x^2$

Q è un trapezio la cui area si può trovare per differenza tra l'area di ABC e quella di T:

$$Area(Q) = Area(ABC) - Area(T) = \frac{AC \cdot BC}{2} - \frac{5}{4}x^2 = \frac{2k \cdot k}{2} - \frac{5}{4}x^2 = k^2 - \frac{5}{4}x^2 = 5 - \frac{5}{4}x^2$$

Il rapporto richiesto è quindi:

$$\frac{Area(T)}{Area(Q)} = \frac{\frac{5}{4}x^2}{5 - \frac{5}{4}x^2} = \frac{x^2}{4 - x^2} = f(x)$$

3)

Si tracci il grafico Γ di $f(x)$ senza tener conto dei limiti geometrici.

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

Dominio: $-\infty < x < -2,\quad -2 < x < 2,\quad 2 < x < +\infty$

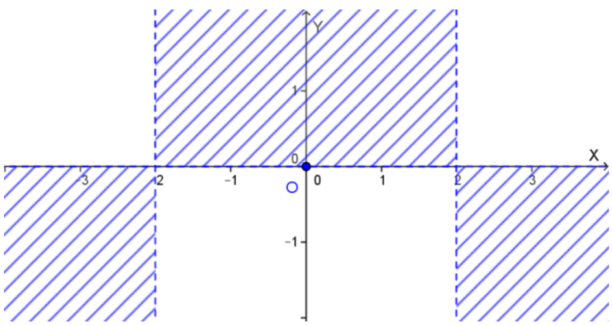
Simmetrie $f(-x) = f(x)$: funzione pari, simmetria rispetto all'asse y.

Intersezioni con gli assi:

$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0$
$y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$

Segno della funzione:

$y > 0$ se $4 - x^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad -2 < x < 2$



Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1$ ($y = -1$ asintoto orizzontale; non possono esistere asintoti obliqui)

$\lim_{x\to\pm 2} \frac{x^2}{4-x^2} = \infty$ ($x = \pm 2$ asintoti verticali)

Derivata prima:

$f'(x) = \frac{8x}{(4-x^2)^2}$

$f'(x) \geq 0$ se $x \geq 0$ (nel dominio di f)

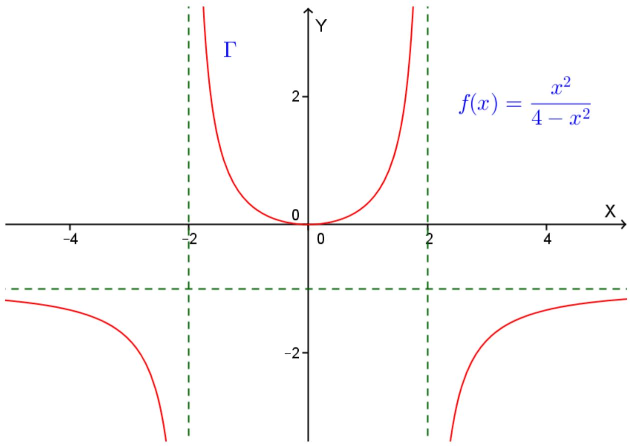
Quindi (nel dominio di f) la funzione è crescente se x>0 e decrescente se x<0.
In (0;0) abbiamo un minimo relativo.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{8(3x^2+4)}{(4-x^2)^3}$$

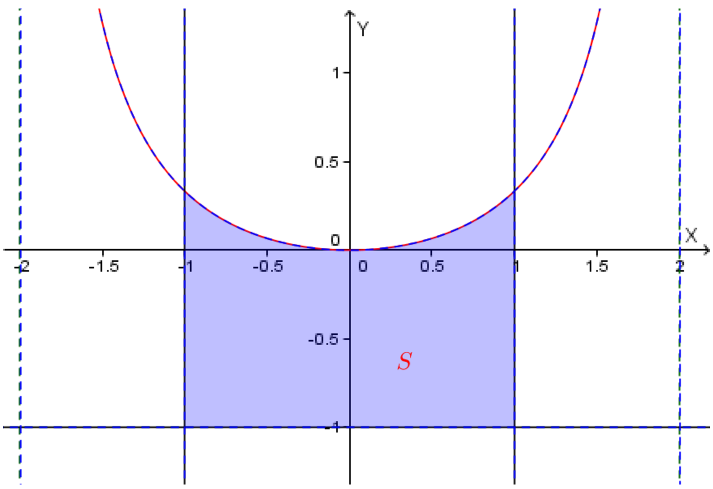
$f''(x) > 0 \quad se \quad 4 - x^2 > 0, \quad -2 < x < 2$ (concavità verso l'alto); no flessi.

Il grafico di $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}}$ è il seguente:



4)

Si calcoli infine l'area della regione finita di piano limitata da Γ e dalle rette di equazioni $x = -1,\ x = 1\ e\ y = -1$.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area(S) = \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^2}{4 - x^2} + 1 \right) dx = 2 \int_{0}^{1} \left(\frac{4}{4 - x^2} \right) dx = -8 \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{x^2 - 4} \right) dx =$$

Cerchiamo una primitiva di $\frac{1}{x^2-4}$.

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{x^2 - 4} = \frac{x(A + B) + 2A - 2B}{x^2 - 4}$$

$$x(A + B) + 2A - 2B = 1 \quad \Longrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 2B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Quindi:

$$Area(S) = -8 \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{x^2 - 4} \right) dx = -8 \int_{0}^{1} \left(\frac{\frac{1}{4}}{x - 2} - \frac{\frac{1}{4}}{x + 2} \right) dx =$$

$$= -2[ln|x - 2| - ln|x + 2|]_0^1 = -2[-ln3 - (ln2 - ln2)] = 2ln3\ u^2 \cong 2.20\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri