Calendario Boreale 2 (AMERICHE) 2014

QUESITO 1

Si calcoli:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\ln x^2}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\ln x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\ln(1+(x^2-1))}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}==\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{4}$$

N.B.

$\ln(1+(x^2-1))\sim x^2-1$ per $x\to 1$ poiché x^2-1 è un infinitesimo per $x\to 1$.

QUESITO 2

Per quali valori reali di x è:

$$\frac{1}{10}(-x^2+3x+10)^{x^2-6x+1}=1$$

Condizioni di esistenza:

$$-x^2+3x+10>0 \quad \cup \quad \begin{cases}-x^2+3x+10=0\\ x^2-6x+1>0\end{cases}$$

$$-x^2+3x+10>0 \qquad x^2-3x-10<0 \qquad -2<x<5$$

$$verificata\ per\ -2<x<5 \quad \cup \quad \begin{cases} & x=-2,\quad x=5\\ x^2-6x+1>0 & x<3-2\sqrt{2}\ \ vel\ \ x>3+2\sqrt{2}\end{cases}$$

$$verificata\ per\ -2<x<5 \quad \cup\ \ x=-2$$

Quindi la condizione di esistenza è: $-2\le x<5$

Riscriviamo l'equazione nella forma:

$$(-x^2+3x+10)^{x^2-6x+1}=10 \qquad \Longrightarrow \qquad \log_{10}(-x^2+3x+10)^{x^2-6x+1}=1$$

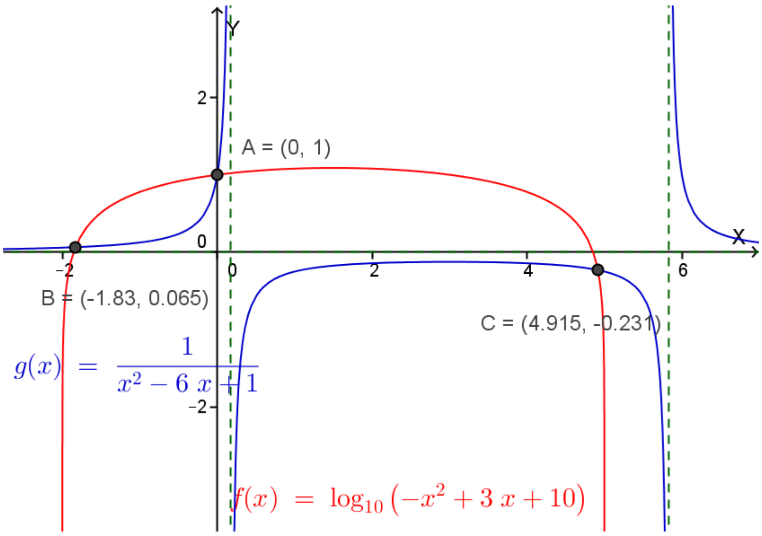
Da cui:

$$(x^2-6x+1)\log_{10}(-x^2+3x+10)=1$$

$$\log_{10}(-x^2+3x+10)=\frac{1}{(x^2-6x+1)}$$

Le radici approssimate di questa equazione possono essere individuate graficamente confrontando le due funzioni:

$$f(x)=\log_{10}(-x^2+3x+10)$$
$$g(x)==\frac{1}{(x^2-6x+1)}$$



Dallo studio grafico si deduce che l'equazione ha 3 soluzioni:

$$x_1\cong -1.83, \qquad x_2=0, \qquad x\_3\cong 4.92$$

Nota

Il quesito, così come è posto, non è, come si è visto, di rapida soluzione.
Probabilmente, per analogia con il **quesito 10 della prova di ordinamento del 2014**, in cui si chiedeva di risolvere l'equazione

$$\left(\frac{1}{5}(x^2-10x+26)\right)^{x^2-6x+1}=1$$

l'equazione da risolvere non voleva essere $\frac{1}{10}(-x^2+3x+10)^{x^2-6x+1}=1$; ma:

$$\left(\frac{1}{10}(-x^2+3x+10)\right)^{x^2-6x+1}=1$$

Risolviamo questa equazione.
Le condizioni di esistenza sono:

$\frac{1}{10}(-x^2+3x+10)>0 \quad \cup \quad \begin{cases} \frac{1}{10}(-x^2+3x+10)=0 \\ x^2-6x+1>0 \end{cases}$

che portano alle soluzioni trovate precedentemente: $-2 \leq x < 5$.

Riscriviamo l'equazione nella forma:

$$\left(\frac{1}{10}(-x^2+3x+10)\right)^{x^2-6x+1} = \left(\frac{1}{10}(-x^2+3x+10)\right)^{0}$$

da cui:

$x^2-6x+1=0 \qquad x=3\pm 2\sqrt{2}$, accettabile solo $x=3-2\sqrt{2}$

oppure

$$\frac{1}{10}(-x^2+3x+10)=1 \;\Longrightarrow\; -x^2+3x=0 \;\Longrightarrow\; x=0, \quad x=3$$

L'equazione

$$\left(\frac{1}{10}(-x^2+3x+10)\right)^{x^2-6x+1} = 1$$

ammette pertanto le 3 soluzioni: $x=0, \quad x=3-2\sqrt{2}, \quad x=3$

QUESITO 3

È possibile che nello sviluppo della potenza $(2a^2-3b^3)^7$ compaia il monomio $ka^{10}b^6$? E il monomio ka^8b^8 ? (k numero reale). Nel caso affermativo si trovi il valore di k motivando esaurientemente la risposta.

Risulta:

$$(2a^2-3b^3)^7 = \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} (2a^2)^i(-3b^3)^{7-i}$$

Il monomio $ka^{10}b^6$ si ottiene se $2i=10$ e $21-3i=6$, da cui $\boldsymbol{i=5.}$

Il monomio $ka^{10}b^6$ si ottiene sostituendo $i=5$ in: $\binom{7}{i}(2a^2)^i(-3b^3)^{7-i}$.

Quindi:

$$k=\binom{7}{5}(2)^5(-3)^2=\binom{7}{5}(2)^5(-3)^2=21\cdot 32\cdot 9=\boldsymbol{6048=k}$$

Il monomio ka^8b^8 si ottiene se $2i=8$ e $21-3i=8$; la prima di queste equazioni è

soddisfatta per $i=4$, che non soddisfa la seconda.
Quindi nello sviluppo della potenza $(2a^2-3b^3)^7$ non compare un monomio del tipo ka^8b^8.

N.B.

Forniamo, per curiosità, lo sviluppo completo:

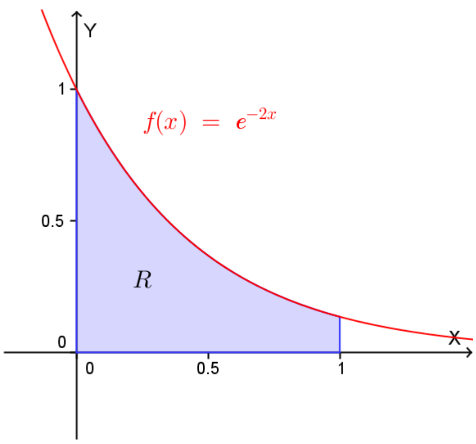
$$(2a^2-3b^3)^7=\sum_{i=0}^{7}\binom{7}{i}(2a^2)^i(-3b^3)^{7-i}=$$

$$128\,a^{14}-1344\,a^{12}\,b^3+6048\,a^{10}\,b^6-15\,120\,a^8\,b^9+$$
$$22\,680\,a^6\,b^{12}-20\,412\,a^4\,b^{15}+10\,206\,a^2\,b^{18}-2187\,b^{21}$$

QUESITO 4

Sia R la regione racchiusa tra $y=e^{-2x}$ e $y=0$ per $0\le x\le 1$. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di R attorno all'asse x .

Rappresentiamo graficamente la regione R:



Il volume richiesto si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_0^1(e^{-2x})^2dx=\pi\int_0^1 e^{-4x}dx=-\frac{\pi}{4}[e^{-4x}]_0^1=-\frac{\pi}{4}(e^{-4}-1)$$

Quindi $V=-\frac{\pi}{4}(e^{-4}-1)=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4e^4}\right)u^3\cong 0.771\,u^3$

QUESITO 5

Si provi l'identità: $arctg\,x+arctg\,y=arctg\,\frac{x+y}{1-xy}$.

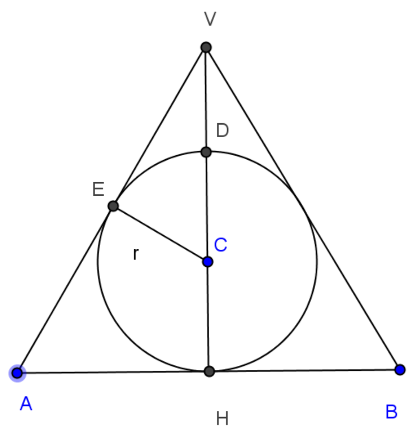
Poniamo $arctg\, x = a \quad \Longrightarrow \quad x = tga$ e $arctg\, y = b \quad \Longrightarrow \quad y = tgb$

Quindi dobbiamo dimostrare che $a + b = arctg\, \frac{x+y}{1-xy} \quad \Longrightarrow \quad tg(a+b) = \frac{x+y}{1-xy}$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga\, tgb} = \frac{x+y}{1-xy}$$

QUESITO 6

Si trovi la capacità in $litri$ della sfera inscritta in un cono di raggio di base $6\ dm$ e altezza $9\ dm$.



$AH = 6\ dm \quad e \quad VH = 9\ dm$

Il volume della sfera è:

$V(sfera) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Dalla similitudine fra i triangoli AHV e VCE risulta: VE:CE=VH:AH.

$VE{:}\,r = 9{:}\,6$

$VE = \sqrt{VC^2 - EC^2} = \sqrt{(9-r)^2 - r^2} = \sqrt{81 - 18r}$

Quindi:

$\sqrt{81-18r}\,{:}\,r = 9{:}\,6 \quad \Longrightarrow \quad 9r = 6\sqrt{81-18r} \quad \Longrightarrow \quad 3r = 2\sqrt{81-18r}$ da cui:

$9r^2 = 4(81 - 18r) \quad \Longrightarrow \quad 9r^2 + 72r - 324 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = -4 \pm 2\sqrt{13}$

Soluzione accettabile $\Longrightarrow \quad r = 2\sqrt{13} - 4 \cong 3.2\ dm$

Quindi il volume della sfera è:

$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(2\sqrt{13} - 4\right)^3 dm^3 \cong 138.692\ dm^3$

Siccome $1\ dm^3 = 1\ litro$

$Capacità\ (sfera) \cong 138.692\ litri$

QUESITO 7

Sapendo che $cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ *e* $senx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ *(ove* $i^2 = -1$*) si dimostri che:*

$$\cos^2 x + sen^2 x = 1$$

$$\cos^2 x + sen^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2}{4} + \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{4i^2} =$$

$$= \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2}{4} - \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

QUESITO 8

Quanti colori si possono formare mediante le combinazioni dei sette colori fondamentali dello spettro? (contando, cioè, i colori presi separatamente e a 2 a 2, a 3 a 3,...,a 7 a 7).

Il numero N dei colori che si possono formare è dato da:

$$N = C_{7,2} + C_{7,3} + C_{7,4} + C_{7,5} + C_{7,6} + C_{7,7} = \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} =$$

$$= 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 120$$

N.B.

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7$$

Quindi:

$$N = \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7 - \binom{7}{0} - \binom{7}{1} = 128 - 1 - 7 = 120$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri